

BÀI 8: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

1. Lý thuyết

Để rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai, ta cần vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

1.1. Ví dụ 1:

Chứng minh đẳng thức $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

Ở bài toán này, ta có thể dùng phương pháp nhân từng thừa số vào rồi cộng các kết quả lại với nhau.

Tuy nhiên, ta có thể quan sát và vận dụng theo cách sau:

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2}$$

1.2. Ví dụ 2:

Rút gọn biểu thức $\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}$; $x \neq -\sqrt{3}$

Hướng dẫn:

$$\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}} = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x + \sqrt{3}} = x - \sqrt{3}$$

2. Bài tập minh họa

2.1. Dạng 1: Rút gọn biểu thức không chứa biến

Câu 1: Rút gọn biểu thức: $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

$$5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{\frac{5^2}{5}} + \sqrt{\frac{20}{2^2}} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Câu 2: Rút gọn biểu thức: $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50}$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} &0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50} \\ &= 0,1\sqrt{10^2 \cdot 2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{0,16} + 0,4\sqrt{5^2 \cdot 2} \\ &= \sqrt{2} + 0,4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ &= 0,4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ &= 3,4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Câu 3: Chứng minh đẳng thức: $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Hướng dẫn giải:

$$\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

2.2. Dạng 2: Rút gọn biểu thức chứa biến

Bài 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{2x}{x+3} - \frac{x+1}{3-x} - \frac{3-11x}{x^2-9}$; $x \neq \pm 3$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x}{x+3} - \frac{x+1}{3-x} - \frac{3-11x}{x^2-9} = \frac{2x(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{3-11x}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{2x^2 - 6x + x^2 + 4x + 3 - 3 + 11x}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x^2 + 9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x}{x-3} \end{aligned}$$

Bài 2: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$; $a > 0, a \neq 1$. $B = 1$

Hãy so sánh A và B.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Vì } a > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} < 1 \Rightarrow A < B$$

3. Luyện tập

3.1. Bài tập tự luận

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

b) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$

Câu 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Câu 3. Rút gọn các biểu thức sau: $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

Câu 4. Cho biểu thức: $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của x khi $A = \frac{1}{2}$.

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Tìm x để A đạt giá trị bằng 3

- A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

Câu 2. Cho biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x-x}}$ với $x > 0, x \neq 1$

Giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là:

- A. $3-2\sqrt{2}$ B. $-3-2\sqrt{2}$ C. $-3+2\sqrt{2}$ D. $3+2\sqrt{2}$

Câu 3. Cho biểu thức $C = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ với $x > 0, x \neq 1$

Với giá trị nào của x thì $|C| = C$

- A. $0 < x < 1$ B. $0 < x < \frac{1}{2}$ C. $x > 1$ D. $0 < x < 2, x \neq 1$

Câu 4. Cho biểu thức $D = \left(1 + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) \left(1 - \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Giá trị của x để D là ước nguyên dương của 2 là:

- A. 0 B. 0; -1 C. 0; 2 D. 1; 2

Câu 5. Cho biểu thức $E = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Định giá trị của x để biểu thức E dương.

- A. $x > 1$ B. $x \in (0; 1)$ C. $x = 0$ D. không tồn tại x

Câu 6. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $4\sqrt{16a} - 3\sqrt{25a} + \sqrt{81a} = 10\sqrt{a} (a > 0)$ B. $\frac{4}{3}\sqrt{6} + 3\sqrt{\frac{2}{3}} - 5\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$
 C. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ D. Cả 3 đáp án trên đều đúng

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{147} - \frac{\sqrt{45}}{4\sqrt{15}} = \frac{119\sqrt{3}}{4}$ B. $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{70} + \sqrt{700} - 5\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{100\sqrt{7}}{7}$
 C. $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120} = 11$ D. $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84} = 21$

Câu 8. Rút gọn $Q = \left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2$, $x > 0, x \neq 1$

- A. $Q = \sqrt{x}$ B. $Q = -\sqrt{x}$ C. $Q=1$ D. $Q=-1$

Câu 9. Rút gọn $M = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} - a\sqrt{\frac{1}{ab}}$ với $a > 0$ và $b > 0$

- A. $M = -\sqrt{ab}$ B. $M = \sqrt{ab}$ C. $M = \frac{3\sqrt{ab}}{b}$ D. Một kết quả khác

Câu 10. Rút gọn $M = \frac{x+y}{y^2} \sqrt{\frac{x^2y^4}{x^2+2xy+y^2}}$ với $x, y > 0$

- A. $M=-x$ B. $M=x$ C. $M = \frac{x}{x+y}$ D. $M = \frac{-|x|}{x+y}$

Câu 11. Giá trị của biểu thức $N = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ bằng

- A. 4 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} + 4$ D. $\sqrt{5} + 4$

Câu 12. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-4x+4} - 6 = 0$ là

- A. $S = \{-3; 6\}$ B. $S = \{4; 8\}$ C. $S = \{-4; 8\}$ D. $S = \{-6; -8\}$

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+6x+9} = \sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}$

- A. $S = \emptyset$ B. $S = \{-9; 3\}$ C. $S = \{9; -3\}$ D. $S = \{-3; 3\}$

Câu 14. Cho $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$

- A. $P = -1$ B. $P = 1$ C. $P = \sqrt{3}$ D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Kết luận

Qua bài giảng Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai này, các em cần hoàn thành 1 số mục tiêu mà bài đưa ra như:

- Biết cách rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai.