BÀI 1: SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1. Giải bài 1 trang 9 sách GK Toán GT lớp 12

Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số

a) $y=4+3x-x^2$

b) $y=\frac{1}{3}x^3+3x^2-7x-2$

c) $y=x^4-2x^2+3$

d) $y=-x^3+x^2-5$

1.1 Phương pháp giải

Với bài toán xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số ta thực hiện bốn bước sau:

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.
- Bước 2: Tính đạo hàm f'(x)=0. Tìm các điểm x_i (i= 1 , 2 ,..., n) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- Bước 3: Sắp xếp các điểm xi theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Bên cạnh đó các em cần ôn lại các định lý về dấu của nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai đã học ở lớp 10 để xét dấu đạo hàm của các hàm số một cách chính xác nhất.

1.2 Hướng dẫn giải

Câu a: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=4+3x-x^2$

Tập xác định: D=R

Có $y'=3-2x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{25}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu b: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+3x^2-7x-2$

Tập xác định: D=R

Có $y'=x^2+6x-7\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2+6x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-7\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-7		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$239/3$	$\searrow$	$-17/3$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-7)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-7;1)$

Câu c: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=x^4-2x^2+3$

Tập xác định: D=R

Có $y'=4x^3-4x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0$

$\Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Câu d: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=-x^3+x^2-5$

Tập xác định: D=R.

Có $y'=-3x^2+2x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-131/27$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

2. Giải bài 2 trang 10 sách GK Toán GT lớp 12

Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số

a) $y=\frac{3x+1}{1-x}$

b) $y=\frac{x^2-2x}{1-x}$

c) $y=\sqrt{x^2-x-20}$

d) $y=\frac{2x}{x^2-9}$

2.1. Phương pháp giải

Với bài toán tìm khoản đơn điệu của hàm số, ta giải theo các bước sau:

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.
- Bước 2: Tính đạo hàm f'(x)=0. Tìm các điểm x_i (i= 1 , 2 ,..., n) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- Bước 3: Sắp xếp các điểm xi theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

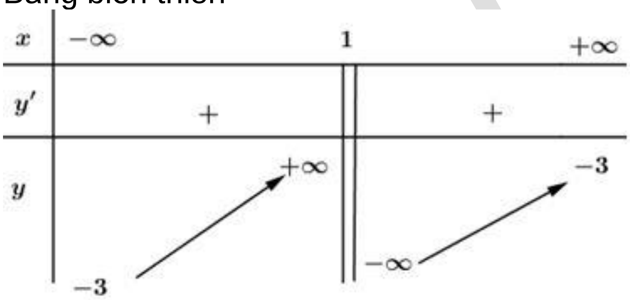
2.2. Hướng dẫn giải

Câu a: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\frac{3x+1}{1-x}$

Tập xác định: $D=R\backslash\{1\}$.

Có: $y'=\frac{3.1-(-1).1}{(-x+1)^2}=\frac{4}{(-x+1)^2}>0\ \forall\ x\in D$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng xác định của nó là: $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Chú ý: Cách tính giới hạn để điền vào BBT: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{1-x}=-3,\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{1-x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x+1}{1-x}=+\infty$

Câu b: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\frac{x^2-2x}{1-x}$

Tập xác định: $D=R\backslash\{1\}$

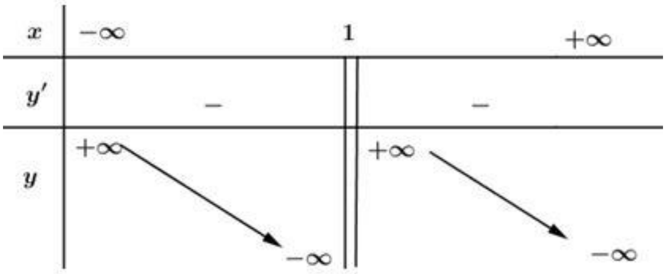
Có

$$y'=\frac{(2x-2)(1-x)+x^2-2x}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x-2}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{-\left(x^2-2x+2\right)}{(1-x)^2}=\frac{-\left(x^2-2x+1\right)-1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{-(x-1)^2-1}{(1-x)^2}=-1-\frac{1}{(1-x)^2}<0\ \forall x\in D.$$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là: $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Chú ý: Cách tính giới hạn để điền vào bảng biến thiên

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{1-x}=-\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{1-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{1-x}=+\infty \quad \lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x+1}{1-x}=-\infty$

Câu c: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{x^2-x-20}$

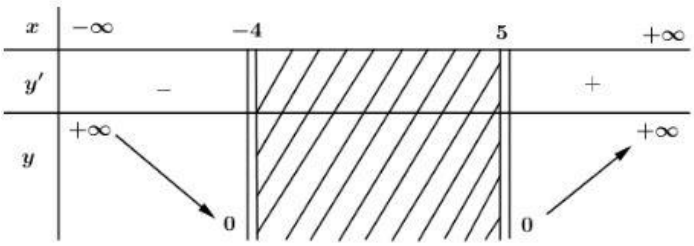
Có $x^2-x-20\ge0\Leftrightarrow(x+4)(x-5)\ge0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le-4\\x\ge5\end{array}\right.$

Tập xác định: $D=(-\infty;-4]\cup[5;+\infty)$

Có $y'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\notin D$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$

Chú ý: Cách tính giới hạn để điền vào BBT

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-20}=+\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x-20}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt{x^2-x-20}=0 \quad \lim\limits_{x\to5^+}\sqrt{x^2-x-20}=0$

Câu d: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\frac{2x}{x^2-9}$

Có $x^2-9\ne0\Leftrightarrow x\ne\pm3$

Tập xác định: $D = R\backslash\{\pm 3\}$

Có: $y' = \dfrac{2\left(x^2-9\right)-2x.2x}{\left(x^2-9\right)^2} = \dfrac{-2x^2-18}{\left(x^2-9\right)^2} = \dfrac{-2\left(x^2+9\right)}{\left(x^2-9\right)^2} < 0\ \forall\ x \in D$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	||	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là: $(-\infty;-3);(-3;3)$ và $(3;+\infty)$.

Chú ý: Cách tính giới hạn để điền vào BBT

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2-9}=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2-9}=0$

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{2x}{x^2-9}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{2x}{x^2-9}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x}{x^2-9}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x}{x^2-9}=-\infty$

3. Giải bài 3 trang 10 sách GK Toán GT lớp 12

Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng (-1;1) và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

3.1. Phương pháp giải

Với bài toán khảo sát tính đơn điệu của hàm số y=f(x) ta thực hiện các bước sau: Tìm tập xác định của hàm số, tính đạo hàm f'(x), giải phương trình f'(x)=0, lập bảng biến thiên và đưa ra kết luận về sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

3.2 Hướng dẫn giải

Tập xác định: D=R

Có: $y' = \dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ta có: $y' > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

$y' < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

4. Giải bài 4 trang 10 sách GK Toán GT lớp 12

Chứng minh rằng hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng (0;1) và nghịch biến trên các khoảng (1;2)

4.1. Phương pháp giải

Bài 4 một bài toán khảo sát tính đơn điệu của hàm số chứa căn thức, để giải bài ta cũng thực hiên qua 4 bước

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.
- Bước 2: Tính đạo hàm f'(x)=0. Tìm các điểm x_i (i= 1 , 2 ,..., n) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- Bước 3: Sắp xếp các điểm xi theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Sau khi khảo sát xong tính đơn điệu của hàm số ta sẽ có được điều phải chứng minh theo yêu cầu của bài 4.

4.2 Hướng dẫn giải

Xét hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$

Tập xác định: $D=[0;2]$

$$y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x=1$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
y'		‖	+	0	−	‖	
y		0	↗	1	↘	0	

Từ bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đồng biến trên khoảng (0;1) và nghịch biến trên khoảng (1;2).

Vậy ta có điều phải chứng minh.

5. Giải bài 5 trang 10 sách GK Toán GT lớp 12

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\tan x>x\ (0<x<\frac{\pi}{2})$

b) $\tan x>x+\frac{x^3}{3}(0<x<\frac{\pi}{2})$

5.1. Phương pháp giải

Với dạng bài tập ở bài 5 chứng minh g(x)>h(x) với x thuộc một miền cho trước ta thường tiến hành như sau:

- Bước 1: $g(x)>h(x)\Leftrightarrow g(x)-h(x)>0$
- Bước 2: Đặt $f\left(x\right)=h\left(x\right)-g\left(x\right)$, khảo sát tính đơn điệu của hàm số $f\left(x\right)$.
- Bước 3: Tìm x để $f\left(x\right)=0$ (thường là hai đầu mút của miền đang xét).
- Bước 4: Từ tính đơn điệu của hàm số $f\left(x\right)$ đưa ra kết luận cho bài toán.

5.2 Hướng dẫn giải

Câu a: Chứng minh $\tan x>x(0<x<\frac{\pi}{2})$

Để chứng minh $tanx > x$ với mọi $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ta chứng minh $tanx - x > 0$ với mọi $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Trước tiên ta cần kiểm tra xem có tồn tại giá trị nào của x đề $tanx - x = 0$ hay không, mà trước hết ta cần thử với hai giá trị là x=0 và $x = \frac{\pi}{2}$

Dễ thấy: $tan(0) - 0 = 0$

Khi đó ta tiến hành mở rộng khoảng đang xét thành nửa khoảng, cụ thể lời giải chi tiết như sau:

Xét hàm số $f(x) = tanx - x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+	||
f(x)	0	$\nearrow$	||

Vậy hàm số đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Vậy với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ta có $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow tanx > x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Câu b: Chứng minh $\tan x > x + \frac{x^3}{3} (0 < x < \frac{\pi}{2})$

Tương tự câu a

Xét hàm số $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ có đạo hàm:

$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$

$= (tanx - x)(tanx + x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (Theo câu a)

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$+$	‖
$g(x)$	0	↗	‖

Vậy hàm số đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

Vậy với $0<x<\frac{\pi}{2}$ ta có $g(x)>g(0) \Rightarrow tanx > x+\frac{x^3}{3}$ với mọi $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Nhận xét: Với dạng bài tập chứng minh $f(x)>0$ với x thuộc khoảng (a;b). Nếu f(a) và f(b) đề khác không, hoặc f(x) không xác định tại a và b. Thì $f(x)=0$ tại x_0, với x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$, ta không cần mở rộng khoảng đang xét.