

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Lý thuyết

1.1. Phương trình $\sin x = a$

Nếu $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm.

Nếu $|a| \leq 1$:

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = \sin \beta^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \beta^0 + k360^0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Tổng quát: $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\oplus \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\oplus \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\oplus \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

1.2. Phương trình $\cos x = a$

Nếu $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm.

Nếu $|a| \leq 1$:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = \cos \beta^0 \Leftrightarrow x = \pm \beta^0 + k360^0 (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Tổng quát: $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\oplus \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\oplus \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\oplus \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

1.3. Phương trình $\tan x = a$

$$\begin{aligned} \oplus \tan x = \tan \alpha &\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \oplus \tan x = \tan \beta^0 &\Leftrightarrow x = \beta^0 + k180^0 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \oplus \tan x = a &\Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Tổng quát: $\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

1.4. Phương trình $\cot x = a$

$$\begin{aligned} \oplus \cot x = \cot \alpha &\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \oplus \cot x = \cot \beta^0 &\Leftrightarrow x = \beta^0 + k180^0 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \oplus \cot x = a &\Leftrightarrow x = \text{arc cot } a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Tổng quát: $\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Bài tập minh họa

2.1. Dạng 1: Giải phương trình $\sin x = a$

Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) &= 0. & \text{b) } \sin x &= \sin \frac{\pi}{12}. \\ \text{c) } \sin 3x &= \frac{1}{2}. & \text{d) } \sin x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{2} + k \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} + k \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{b) } \sin x = \sin \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{c) } \sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{5\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

$$d) \sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.2. Dạng 2: Giải phương trình $\cos x = a$

Giải các phương trình sau:

$$a) \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$b) \cos(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{11\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{5\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$$b) \cos(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x + 45^\circ) = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 45^\circ = 45^\circ + k360^\circ \\ x + 45^\circ = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -90^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = 45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Dạng 3: Giải phương trình $\tan x = a$

Giải các phương trình sau:

$$a) \tan x = \tan \frac{\pi}{3}.$$

$$b) \tan(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b) \tan(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(x - 15^\circ) = \tan 30^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

2.4. Dạng 4: Giải phương trình $\cot x = a$

Giải các phương trình sau:

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7}$.

b) $\cot 4x = -3$.

c) $\cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải:

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 4x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cot 4x = -3 \Leftrightarrow 4x = \arctan(-3) + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\arctan(-3) + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1}{4}\arctan(-3) + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$.

c) $\cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

3. Luyện tập

3.1. Bài tập tự luận

Câu 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$. b) $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$.

c) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $\sin x = \frac{3}{5}$.

Câu 2: Giải các phương trình sau:

a) $\cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

b) $\cos(x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$.

b) $\tan(x - 30^\circ) = \sqrt{3}$.

Câu 4: Giải các phương trình sau:

a) $\cot 3x = \cot \frac{3\pi}{8}$.

b) $\cot 5x = -4$.

c) $\cot\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Giải phương trình $\sin 4x = \sin \frac{\pi}{5}$.

A. $x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{3\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. Giải phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5}$.

A. $x = \pm \arccos \frac{2}{5} - \frac{\pi}{18} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \arccos \frac{2}{5} + \frac{\pi}{18} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \arccos \frac{5}{2} - \frac{\pi}{18} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \arccos \frac{5}{2} + \frac{\pi}{18} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Giải phương trình $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

A. $x_1 = 5 - \frac{11\pi}{6}; x_2 = 5 - \frac{13\pi}{6}$.

B. $x_1 = 5 + \frac{11\pi}{6}; x_2 = 5 - \frac{13\pi}{6}$.

C. $x_1 = 5 - \frac{11\pi}{6}; x_2 = 5 + \frac{13\pi}{6}$.

D. $x_1 = 5 + \frac{11\pi}{6}; x_2 = 5 + \frac{13\pi}{6}$.

Câu 4. Giải phương trình $\tan 3x = \tan \frac{3\pi}{5}$.

A. $x = \frac{3\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{3\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5. Giải phương trình $\cot 2x = \cot\left(-\frac{1}{3}\right)$.

A. $x = -\frac{1}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{1}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Giải phương trình $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = -\sqrt{3}$.

A. $x = -200^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -200^\circ + k720^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -20^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -20^\circ + k720^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Giải phương trình $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$.

A. $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A có vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số:

$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12, t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365$. Thành phố A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

A. 262

B. 266

C. 281

D. 292

Câu 9. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A có vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số:

$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12, t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ sáng mặt trời nhất?

A. 365

B. 353

C. 235

D. 153

Câu 10. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A có vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số:

$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12, t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ sáng mặt trời nhất?

A. 217

B. 117

C. 271

D. 171

4. Kết luận

Bài học này giới thiệu đến các em những nội dung cơ bản nhất về phương trình lượng giác. Đây là một dạng toán nền tảng không chỉ trong phạm vi khảo sát hàm số lượng giác

mà còn được ứng dụng trong việc giải phương trình lượng giác, sự đơn điệu của hàm số lượng giác,

www.eLib.vn