

MỆNH ĐỀ

1. Lý thuyết

1.1. Mệnh đề. Mệnh đề chứa biến.

a) Mệnh đề

Mỗi mệnh đề là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

Một câu khẳng định đúng gọi là mệnh đề đúng. Một câu khẳng định sai gọi là mệnh đề sai.

Ví dụ:

Số 2 là số nguyên tố là một mệnh đề đúng.

5 chia hết cho 3 là mệnh đề sai.

b) Mệnh đề chứa biến

Ví dụ: Xét các câu:

(a): " $7 + x = 3$ "

(b): " n là số nguyên tố"

Hãy tìm hai giá trị của x , n để (a), (b) nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

* Câu (a) và (b) là những ví dụ về mệnh đề chứa biến.

1.2. Phủ định của một mệnh đề

Kí hiệu mệnh đề phủ định của mệnh đề P là \bar{P} , ta có :

\bar{P} đúng khi P sai.

\bar{P} sai khi P đúng.

Ví dụ:

Cho mệnh đề P : " π là một số hữu tỷ". Ta có: \bar{P} : " π không là một số hữu tỷ".

Cho mệnh đề Q : "Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba".

Ta có: \bar{Q} : "Tổng hai cạnh của một tam giác không lớn hơn cạnh thứ ba".

1.3. Mệnh đề kéo theo

Ví dụ: Hãy xét dạng của mệnh đề "Nếu gió mùa đông Bắc về thì trời trở lạnh".

Mệnh đề "Nếu P thì Q " được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai.

Các mệnh đề toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$

P là giả thiết, Q là kết luận của định lí.

Hoặc P là điều kiện đủ để có Q , hoặc Q là điều kiện cần để có P .

Ví dụ:

Cho mệnh đề: "Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60° thì ABC là một tam giác đều".

GT: Tam giác ABC có hai góc bằng 60°.

KL: ABC là một tam giác đều.

1.4. Mệnh đề đảo – Hai mệnh đề tương đương

Ví dụ: Cho số thực x . Xét:

P: “ x là một số nguyên”.

Q: “ $x + 2$ là một số nguyên”.

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

b) Xét tính đúng sai của hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

Ta có:

+ $P \Rightarrow Q$: “Nếu x là một số nguyên thì $x + 2$ là một số nguyên”. (Đúng)

+ $Q \Rightarrow P$: “Nếu $x + 2$ là một số nguyên thì x là một số nguyên”. (Đúng)

Định nghĩa:

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương và kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

Cách đọc:

P tương đương Q

P là điều kiện cần và đủ để có Q

1.5. Kí hiệu \forall và \exists .

Ví dụ: Cho các mệnh đề sau:

P: “Mọi số tự nhiên đều lớn hơn số đối của nó”.

Q: “Có một số hữu tỷ nhỏ hơn nghịch đảo của nó”.

Hãy phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề trên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề P, Q, \bar{P} , \bar{Q} .

Ta có:

+ \bar{P} : “Có một số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng số đối của nó”.

+ \bar{Q} : “Mọi số hữu tỷ đều lớn hơn hoặc bằng nghịch đảo của nó”.

+ P sai, \bar{P} đúng vì số 0 không có số đối.

+ Q đúng, \bar{Q} sai, chẳng hạn $\frac{1}{2} < 2$.

Kí hiệu \forall đọc là “với mọi”.

Kí hiệu \exists đọc là “có một” (tồn tại một) hay “có ít nhất một”.

Nhận xét:

Mệnh đề phủ định của “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là “ $\exists x \in X, \bar{P}(x)$ ”.

Mệnh đề phủ định của " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

Ví dụ:

Mệnh đề P: " $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$ "

Tồn tại số tự nhiên n mà bình phương của nó bằng chính nó.

Với mọi số nguyên:

Mệnh đề Q: " $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = x$ "

Bình phương của mọi số nguyên x đều bằng chính nó.

2. Bài tập minh họa

Câu 1: Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay sai?

- $\sqrt{2}$ không là số hữu tỉ.
- Iran là một nước thuộc châu Âu phải không?
- Phương trình $x^2 + 5x + 6 = 0$ vô nghiệm.
- Chứng minh bằng phản chứng khó thật!
- $x+4$ là một số âm.
- Nếu n là số chẵn thì n chia hết cho 4.
- Nếu n chia hết cho 4 thì n là số chẵn.
- n là số chẵn nếu và chỉ nếu n^2 chia hết cho 4.
- $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không là bội của 3.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

Hướng dẫn giải:

- Đây là mệnh đề đúng.
- Đây là câu hỏi, không phải là mệnh đề.
- Đây là mệnh đề sai vì phương trình có nghiệm $x=-2$.
- Đây là câu cảm thán, không phải là mệnh đề.
- Đây là mệnh đề chứa biến.
- Đây là mệnh đề sai vì $n=2$ là số chẵn nhưng không chia hết cho 4.
- Đây là mệnh đề đúng.
- Đây là mệnh đề đúng.
- Đây là mệnh đề sai vì $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ chia hết cho 3.
- Ta có: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Đây là mệnh đề đúng.

Câu 2: Tìm mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo này đúng hay sai: "Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau".

Hướng dẫn giải:

Mệnh đề đã cho có dạng: $P \Rightarrow Q$ trong đó P là “hai góc đối đỉnh”, Q là “hai góc bằng nhau”. Vậy mệnh đề đảo là: “Nếu hai góc bằng nhau thì chúng đối đỉnh”. Mệnh đề này sai.

Câu 3: Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai.

a) $P = " \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0 "$.

b) $Q = " \text{Có một tam giác không có góc nào lớn hơn } 60^\circ "$.

Hướng dẫn giải:

Mệnh đề phủ định của " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".

Mệnh đề phủ định của " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

a) Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P} = " \exists x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 < 0 "$. Đây là mệnh đề sai.

b) Mệnh đề phủ định của Q là $\overline{Q} = " \text{Mọi tam giác luôn có một góc lớn hơn } 60^\circ "$.

Đây là mệnh đề sai vì tam giác đều không có góc lớn hơn 60° .

3. Luyện tập**3.1. Bài tập tự luận**

Câu 1: Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay sai?

a) $\sqrt{4}$ không là số hữu tỉ.

b) Hà Lan là một nước thuộc châu Âu phải không?

c) Phương trình $x^2 + x + 6 = 0$ vô nghiệm.

d) Chứng minh thẳng hàng khó thật!

e) $x^2 + 2x + 2$ là một số âm.

f) Nếu n là số chẵn thì n chia hết cho 2.

g) Nếu n chia hết cho 8 thì n là số chẵn.

h) n là số lẻ nếu và chỉ nếu n^2 chia hết cho 3.

i) $\forall n = 2k; k \in \mathbb{N}; n^2 + 2n$ không là bội của 4.

j) $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 + 4x + 1 < 0$.

Câu 2: Tìm mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo này đúng hay sai: “Tam giác cân có một góc bằng 60° là tam giác đều”.

Câu 3: Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai.

a) $P = " \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 "$.

b) $Q = " \text{Có một tứ giác không có góc nào nhỏ hơn } 90^\circ "$.

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề đúng?

- A. π là một số hữu tỉ.
- B. Tổng hai cạnh một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba.
- C. Bạn có chăm học không?
- D. Con thì thấp hơn cha.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

- A. Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$.
- B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.
- C. Nếu em cố gắng học tập thì em sẽ thành công.
- D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

Câu 3: Cách phát biểu nào sau đây không thể dùng để phát biểu mệnh đề $A \Rightarrow B$.

- A. Nếu A thì B
- B. A kéo theo B
- C. A là điều kiện đủ để có B
- D. A là điều kiện cần để có B

Câu 4: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. $\forall x \in \mathbb{N} : x$ chia hết cho 3
- B. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$
- C. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
- D. $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Một tam giác là tam giá vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
- B. Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có hai trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng 60° .
- C. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.
- D. Tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có 3 góc vuông.

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì bằng nhau.
- B. Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- C. Tam giác có ba cạnh bằng nhau thì có ba góc bằng nhau.
- D. Tam giác có ba góc bằng nhau thì có ba cạnh bằng nhau.

Câu 7: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$
- B. $\exists n \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$
- C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$
- D. $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} > 0$

Câu 8: Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0$ với a là số thực cho trước. Tìm a để mệnh đề đúng

- A. $a < 2$ B. $a \leq 2$ C. $a = 2$ D. $a > 2$

Câu 9: Mệnh đề là một khẳng định

- A. đúng B. sai C. đúng hoặc sai D. vừa đúng vừa sai

Câu 10: Các phương án sau, đâu là một mệnh đề đúng?

- A. $2 < 1$ B. $2 + 4 = 6$ C. $3 > 5$ D. $6/2 = 9/4$

Câu 11: Với giá trị nào của x thì là một mệnh đề đúng?

- A. $x \leq 1$ B. $x = -1$ C. $x = 1$ D. $x = 0$

Câu 12: Câu nào sau đây không phải là mệnh đề?

- A. Bạn bao nhiêu tuổi? B. Hôm nay là chủ nhật
C. Trái đất hình tròn D. $3 \neq 6$

Câu 13: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào đúng?

- A. $\forall n \in \mathbb{N}, n+4$ chia hết cho 4 B. $\exists r \in \mathbb{Q}, r^2 = 7$
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$

Câu 14: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề?

- A. Các em hãy cố gắng học tập!
B. Một tam giác cân thì mỗi góc đều bằng 60° phải không?
C. 3 là số nguyên tố lẻ nhỏ nhất.
D. Ngày mai bạn có đi du lịch không?

Câu 15: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $\forall x \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| = x$ B. $\forall x \in \mathbb{R}$ sao cho $x+1 > x$
C. $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho $x-3 = x^2$ D. $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 < 0$

Câu 16: Cho mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ " Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

- A. $\exists x \in \mathbb{R}$ mà $x^2 - x + 7 \geq 0$
B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$
D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$

Câu 17: Hỏi trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x > -3 \Rightarrow x^2 > 9$ "
B. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$ "
C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > -3$ "
D. " $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ "

Câu 18: Mệnh đề phủ định của mệnh đề “Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ vô nghiệm” là mệnh đề nào sau đây?

- A. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có nghiệm kép.
- B. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ không có nghiệm.
- C. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt.
- D. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có nghiệm.

4. Kết luận

Bài học này giới thiệu đến các em những nội dung cơ bản nhất về khái niệm cơ bản nhất của mệnh đề. Về các thuật ngữ có vẻ hết sức quen thuộc. Khái niệm Tập hợp các em đã bước đầu được tìm hiểu ở chương trình Toán lớp 6, lên bậc THPT chúng ta sẽ được học nâng cao hơn, các em cần tìm hiểu thêm.