

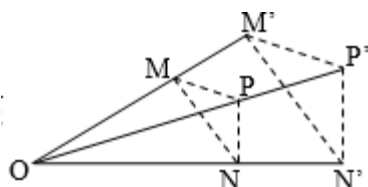
PHÉP VỊ TỰ

1. Lý thuyết

1.1. Định nghĩa

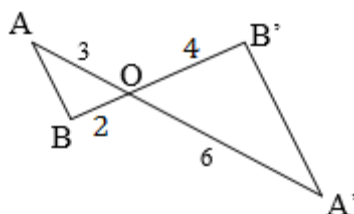
Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, được gọi là phép vị tự tâm O với tỉ số k .



Kí hiệu: $V(O, k)$ (O được gọi là tâm vị tự).

$$V_{(O, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$



$$|k| = \frac{|\overrightarrow{OA'}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow k = -2$$

(do \overrightarrow{OA} và $\overrightarrow{OA'}$ ngược hướng)

Một số nhận xét quan trọng:

Trong phép vị tự có một điểm bất động là tâm vị tự.

Khi $k = 1$ thì phép vị tự $V_{(O, k)}$ là phép đồng nhất.

Khi $k = -1$ thì phép vị tự $V_{(O, k)}$ chính là phép đối xứng tâm O (Khi đó tâm vị tự trở thành tâm đối xứng).

Qua phép vị tự tâm O với tỉ số k biến M thành M' thì phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{k}$ sẽ biến

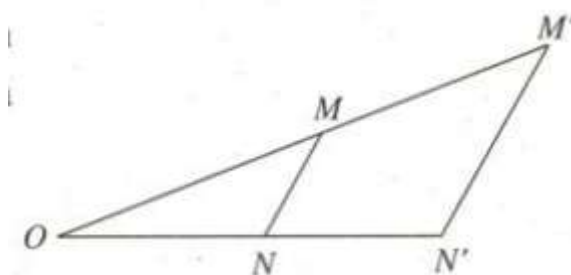
$$M' \text{ thành } M: V_{(O, k)}(M) = M' \Leftrightarrow V_{\left(O, \frac{1}{k}\right)}(M') = M.$$

1.2. Các tính chất

Tính chất 1:

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

$$\begin{cases} V_{(O,k)}(M) = M' \\ V_{(O,k)}(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N' = |k|MN$$



Tính chất 2:

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Từ các định lý trên ta có các hệ quả sau:

Hệ quả: Phép vị tự tỉ số k :

Biến đường thẳng không đi qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với nó.

Biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.

Biến tia thành tia.

Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.

Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.

Biến góc thành góc bằng nó.

1.3. Ảnh của đường tròn qua phép vị tự

Tính chất 3:

Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

Chú ý: Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R')$ thì:

$$|k| = \frac{R'}{R} \text{ và } \overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}.$$

1.4. Tâm vị tự của đường tròn

- Với hai đường tròn bất kì luôn tồn tại một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm vị tự của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

- Nếu tâm vị tự $k > 0$ thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tâm vị tự $k < 0$ thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự trong.

- Hai đường tròn bán kính bằng nhau và khác tâm thì chỉ có một tâm vị tự trong và đó chính là trung điểm của đoạn nối tâm.

- Hai đường tròn có bán kính khác nhau thì có một tâm vị tự trong và một tâm vị tự ngoài.

- Đường tròn (C) biến thành chính nó khi và chỉ khi đường tròn (C) có tâm là tâm vị tự và có tỉ số vị tự $k = \pm 1$.

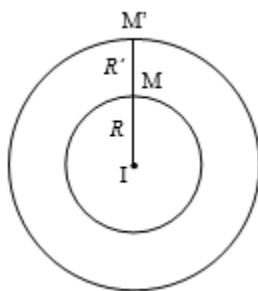
- Cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn:

Tìm tâm vị tự của hai đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R')$.

Trường hợp 1: I trùng với I'

- Tâm vị tự: Chính là tâm I của hai đường tròn.

- Tỷ số vị tự: $|k| = \frac{|IM'|}{|IM|} = \frac{R'}{R} \Rightarrow k = \pm \frac{R'}{R}$.



Trường hợp 2: I khác I' và $R \neq R'$

- Tâm vị tự: Tâm vị tự ngoài là O, tâm vị tự trong là O₁ trên hình vẽ.

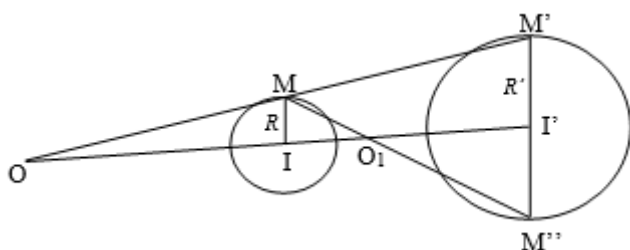
- Tỷ số vị tự:

+ Tâm O: $|k| = \frac{|OM'|}{|OM|} = \frac{|I'M'|}{|IM|} = \frac{R'}{R} \Rightarrow k = \frac{R'}{R}$

(do \overrightarrow{OM} và $\overrightarrow{OM'}$ cùng hướng)

+ Tâm O₁: $|k_1| = \frac{|O_1M''|}{|O_1M|} = \frac{|I'M''|}{|IM|} = \frac{R'}{R} \Rightarrow k_1 = -\frac{R'}{R}$

(do $\overrightarrow{O_1M}$ và $\overrightarrow{O_1M''}$ ngược hướng)



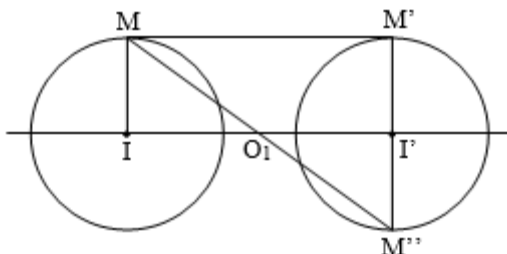
Trường hợp 3: I khác I' và $R = R'$

- Tâm vị tự: Chính là O₁ trên hình vẽ.

- Tỷ số vị tự:

$$|k| = \frac{|\overrightarrow{O_1 M''}}{|\overrightarrow{O_1 M}} = \frac{|\overrightarrow{I' M''}}{|\overrightarrow{I M}} = \frac{R}{R} = 1 \Rightarrow k = -1$$

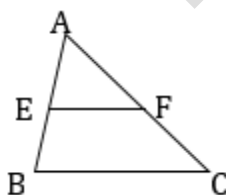
(do $\overrightarrow{O_1 M}$ và $\overrightarrow{O_1 M''}$ ngược hướng)



2. Bài tập minh họa

Câu 1: Cho $\triangle ABC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tìm phép vị tự biến B và C tương ứng thành E và F.

Hướng dẫn giải:



Vì BE và CF cắt nhau tại A nên A là tâm vị tự cần tìm.

Ta có:

$$\begin{cases} V_{(A,k)}(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} \\ V_{(A,k)}(C) = F \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$|k| = \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

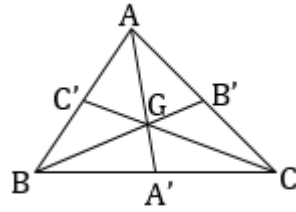
(do \overrightarrow{AE} và \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AF} và \overrightarrow{AC} cùng hướng)

Vậy phép vị tự cần tìm là $V_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$.

Câu 2: Cho $\triangle ABC$ có A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Tìm một phép vị tự biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$.

Hướng dẫn giải:

-Vì AA', BB', CC' cắt nhau tại G nên G là tâm vị tự cần tìm.



-Ta có: $V_{(G,k)}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} = k\overrightarrow{GA}$

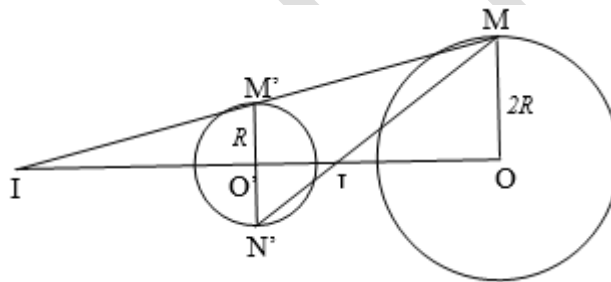
$$|k| = \frac{|\overrightarrow{GA'}|}{|\overrightarrow{GA}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

(do \overrightarrow{GA} và $\overrightarrow{GA'}$ ngược hướng)

Vậy phép vị tự cần tìm là $V_{(G, -\frac{1}{2})}$.

Câu 3: Cho hai đường tròn $(O; 2R)$ và $(O'; R)$ ngoài nhau. Tìm phép vị tự biến $(O; 2R)$ thành $(O'; R)$.

Hướng dẫn giải:



Lấy M bất kỳ trên $(O; 2R)$, vẽ đường thẳng qua O' song song với OM cắt $(O'; R)$ tại M' và N' . Gọi MM' cắt OO' tại I, MN' cắt OO' tại J.

I là tâm vị tự ngoài, tỷ số vị tự $k = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

J là tâm vị tự trong, tỷ số vị tự $k = -\frac{R}{2R} = -\frac{1}{2}$

Câu 4:

a) Cho $A(1; -3)$. Tìm tọa độ $A' = V_{(O; -2)}(A)$.

b) Cho $d: x + 2y + 3 = 0$. Tìm phương trình $d' = V_{(I; 2)}(d)$ biết $I(1; 2)$.

Hướng dẫn giải:

a) Gọi $A'(x'; y')$

Ta có $A' = V_{(O; -2)}(A) \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA} \Rightarrow (x'; y') = -2(1; -3) \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(-2; 6)$.

b) Chọn $M(-3;0) \in d$.

Gọi $M' = V_{(I;k)}(M)$

Ta có: $\overrightarrow{IM} = (-4; -2)$

$$M' = V_{(I;2)}(M) \Rightarrow \overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} x_M' - 1 = -8 \\ y_M' - 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M' = -7 \\ y_M' = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M'(-7; -2) \in d'$$

Theo tính chất của phép vị tự d' song song hoặc trùng với d suy ra đường thẳng d' có một VTPT là: $\vec{n} = (1; 2)$.

Vậy phương trình d' là: $1(x+7) + 2(y+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 11 = 0$.

Câu 5: Tìm ảnh của (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$ qua phép vị tự tâm $I(1;2)$, tỉ số $k=-2$.

Hướng dẫn giải:

Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$ có tâm $M(3; -1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi đường tròn (C') có tâm $M'(x'; y')$, bán kính R' là ảnh của của (C).

$$\text{Do } k = -2 \Rightarrow R' = 2\sqrt{5}.$$

Ta có: $\overrightarrow{IM} = (2; -3)$

$$V_{(I;-2)}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} x' - 1 = -4 \\ y' - 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 8 \end{cases} \Rightarrow M'(-3; 8).$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 20$.

3. Luyện tập

3.1. Bài tập tự luận

Câu 1: Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tìm phép vị tự biến A và C tương ứng thành M và N.

Câu 2: Cho hình vuông ABCD có A', B', C'. D' theo thứ tự là trung điểm của AB; BC, CD, DA. Tìm một phép vị tự biến hình vuông ABCD thành hình vuông A'B'C'D'.

Câu 3: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; 3R)$ ngoài nhau. Tìm phép vị tự biến $(O; R)$ thành $(O'; 3R)$.

Câu 4:

a) Cho $A(2; -4)$. Tìm tọa độ $A' = V_{(O;-1)}(A)$.

b) Cho $d: 3x + 5y + 7 = 0$. Tìm phương trình $d' = V_{(I;3)}(d)$ biết $I(3;5)$.

Câu 5: Tìm ảnh của (C): $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3$ qua phép vị tự tâm $I(2;2)$, tỉ số $k=3$.

3.2. Bài tập trắc nghiệm

- B. Có đúng hai phép vị tự biến d thành d'
- C. Có vô số phép vị tự biến d thành d'
- D. Không có phép vị tự nào biến d thành d'

4. Kết luận

Nội dung bài học cung cấp đến các em khái niệm và những tính chất quan trọng của Phép vị tự. Thông qua các ví dụ minh họa có hướng dẫn giải các em sẽ nắm được các dạng bài tập thường gặp và phương pháp giải như: xác định tâm vị tự, tìm tỉ số vị tự, xác định tọa độ điểm điểm, phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn qua một phép vị tự, ... , qua đó làm chủ được kiến thức.