

## BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### 1. Giải bài 1 trang 28 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau

a)  $\sin(x+2) = \frac{1}{3}$

b)  $\sin 3x = 1$

c)  $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

d)  $\sin(2x+20^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

#### 1.1. Phương pháp giải

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

#### 1.2. Hướng dẫn giải

**Câu a:**  $\sin(x+2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \arcsin \frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x+2 = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin \frac{1}{3} - 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} - 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \arcsin \frac{1}{3} - 2 + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

và  $x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} - 2 + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**Câu b:**  $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu c:**  $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

**Câu d:**  $\sin(2x+20^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x+20^\circ) = \sin(-60^\circ)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+20^\circ = -60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 2x+20^\circ = 204^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -40^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x = 110^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -40^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z}); x = 110^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

## 2. Giải bài 2 trang 28 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \sin 3x$  và  $y = \sin x$  bằng nhau?

### 2.1. Phương pháp giải

Giải phương trình lượng giác cơ bản  $\sin 3x = \sin x$

### 2.2. Hướng dẫn giải

$x$  thỏa mãn yêu cầu bài ra khi và chỉ khi  $x$  là nghiệm của phương trình:

$$\sin 3x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi \\ 4x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Vậy  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ là nghiệm.} \end{cases}$

## 3. Giải bài 3 trang 28 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau

a)  $\cos(x-1) = \frac{2}{3}$

b)  $\cos 3x = \cos 12^\circ$

c)  $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

d)  $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$

### 3.1. Phương pháp giải

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

### 3.2. Hướng dẫn giải

**Câu a:** Ta có

$$\cos(x-1) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \arccos \frac{2}{3} + k2\pi \\ x-1 = -\arccos \frac{2}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos \frac{2}{3} + 1 + k2\pi \\ x = -\arccos \frac{2}{3} + 1 + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu b:** Ta có

$$\cos 3x = \cos 12^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12^\circ + k360^\circ \\ 3x = -12^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4^\circ + k120^\circ \\ x = -4^\circ + k120^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu c:** Ta có

$$\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3} \\ x = \frac{-5\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu d:** Ta có

$$\cos^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

#### 4. Giải bài 4 trang 29 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải phương trình sau:  $\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$

##### 4.1. Phương pháp giải

- Tìm ĐKXD.
- $\frac{A}{B} = 0 \Rightarrow A = 0$
- Giải phương trình lượng giác cơ bản:  $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

##### 4.2. Hướng dẫn giải

Điều kiện

$$\sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kiểm tra ĐK:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \neq \frac{\pi}{4} + l\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{k\pi}{2} \neq l\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} \neq l \Leftrightarrow k \neq 2l$$

Hay k không thể nhận các giá trị chẵn.

Do đó k lẻ nên  $k = 2m + 1$ .

$$\text{Vậy } x = \frac{\pi}{4} + \frac{(2m+1)\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + m\pi$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{3\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$

## 5. Giải bài 5 trang 29 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau

a)  $\tan(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b)  $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$

c)  $\cos 2x \cdot \tan x = 0$

d)  $\sin 3x \cdot \cot x = 0$

### 5.1. Phương pháp giải

- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k180^\circ$   
( $k \in \mathbb{Z}$ )
- $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- $AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

### 5.2. Hướng dẫn giải

**Câu a:** Điều kiện  $x - 15^\circ \neq 90^\circ + k180^\circ$  hay  $x \neq 105^\circ + k.180^\circ$

$$\tan(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(x - 15^\circ) = \tan 30^\circ, \text{ với điều kiện}$$

Ta có phương trình  $\tan(x - 15^\circ) = \tan 30^\circ$

$$\Leftrightarrow x - 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thoả điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = 45^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu b:**  $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$ , với điều kiện  $3x - 1 \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) hay  $x \neq \frac{1+k\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Ta có phương trình  $\cot(3x - 1) = \cot(-\frac{\pi}{6})$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thoả điều kiện)}$$

Vậy nghiệm phương trình là  $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu c:**  $\cos 2x \cdot \tan x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ , với điều kiện  $\cos x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ ta có phương trình: } \cos 2x \cdot \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy nghiệm phương trình là:  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$  hoặc  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

**Câu d:**  $\sin 3x \cdot \cot x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 0$ , với điều kiện  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k \cdot 2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ta có phương trình  $\sin 3x \cdot \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

So sánh với điều kiện ta thấy khi  $k = 3m, m \in \mathbb{Z}$  thì  $x = 2m\pi \Rightarrow \sin x = 0$  không thỏa điều kiện.

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{k2\pi}{3}$  và  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \neq 3m, m \in \mathbb{Z})$

## 6. Giải bài 6 trang 29 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  và  $y = \tan 2x$  bằng nhau?

### 6.1. Hướng dẫn giải

Giá trị của các hàm số:  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  và  $y = \tan 2x$  bằng nhau khi:

Ta có

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 2x \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \neq 3m - 1, m \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \neq 3m - 1, m \in \mathbb{Z})$

## 7. Giải bài 7 trang 29 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau

a)  $\sin 3x - \cos 5x = 0$

b)  $\tan 3x \cdot \tan x = 1$

### 7.1. Phương pháp giải

a) Chuyển về, sử dụng công thức  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  đưa phương trình về dạng

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + k2\pi \\ \alpha = -\beta + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Tìm ĐKXĐ.

Sử dụng các công thức:  $\frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  đưa phương trình về

$$\text{dạng } \tan \alpha = \tan \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

## 7.2. Hướng dẫn giải

**Câu a:** Ta có

$$\sin 3x - \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = \sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 5x = -\frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm phương trình là:  $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$  và  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu b:** Điều kiện

$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan 3x \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \cot x$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (tm)$$

Vậy nghiệm phương trình là  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$