BÀI 3: MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

1. Giải bài 1 trang 36 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải phương trình: $sin^2x - sinx = 0$

1.1. Phương pháp giải

Đặt nhân tử chung, đưa phương trình về dạng tích và giải các phương trình lượng giác cơ bản

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array} \right. \left(k \in Z \right)$$

1.2. Hướng dẫn giải

$$\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array} \right. \left(k \in Z \right)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \left(k \in Z \right)$

2. Giải bài 2 trang 36 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau

a) $2cos^2x - 3cosx + 1 = 0$

b) $2sin2x + \sqrt{2}sin4x = 0$

2.1. Phương pháp giải

a) Đặt t=cosx, đưa về phương trình bậc hai ẩn t, giải phương trình bậc hai ẩn t sau đó giải các phương trình lượng giác cơ bản của cos.

b) Sử dụng công thức nhân đôi $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

Đặt nhân tử chung, đưa phương trình về dạng tích.

Giải các phương trình lượng giác cơ bản của sin và cos.

2.2. Hướng dẫn giải

Câu a: Đặt $t = cosx, t \in [-1;1]$ ta được phương trình

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\left(tm \right) \\ t = \frac{1}{2}\left(tm \right) \end{array} \right.$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \left(k \in Z \right)$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \left(k \in Z \right)$$

Vậy $x = k2\pi$ hoặc $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Câu b: Ta có

$$2\sin 2x+\sqrt{2}\sin 4x=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x+2\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\left(1+\sqrt{2}\cos 2x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ 1+\sqrt{2}\cos 2x=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ 2x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.\quad\left(k\in Z\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\pm\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\left(k\in Z\right)$

3. Giải bài 3 trang 37 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau

a) $sin^2(\frac{x}{2})-2cos(\frac{x}{2})+2=0$

b) $8cos^2x+2sinx-7=0$

c) $2tan^2x+3tanx+1=0$

d) $tanx\ -2cotx\ +\ 1\ =\ 0$

3.1. Phương pháp giải

- Sử dụng công thức lượng giác cơ bản đã học
- Đặt ẩn phụ \(t = \cos \frac{x}{2}\,\,\,\left({t \in \left[{ - 1;1} \right]} \right)\), đưa về phương trình bậc hai ẩn t, giải phương trình suy ra các nghiệm t.
- Giải các phương trình lượng giác cơ bản của cos: \(\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi \,\,\left({k \in Z} \right)\)

3.2. Hướng dẫn giải

Câu a: Ta có

$$\sin^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}+2=0$$
$$\Leftrightarrow 1-\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}+2=0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}-3=0$$

Đặt $t=cos\dfrac{x}{2},t\in\left[-1;1\right]$ thì phương trình trở thành

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ (tm) \\ t=-3\,(ktm)\end{array}\right.$$

$$Khi\, t=1 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=k4\pi\,(k\in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=k4\pi\,(k\in Z)$

Câu b: Ta có

$$8\cos^2 x+2\sin x-7=0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(1-\sin^2 x\right)+2\sin x-7=0$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x-2\sin x-1=0$$

Đặt t = sinx, t ∈ [-1 ; 1] thì phương trình trở thành

$$8t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{4}\end{array}\right.(tm)$$

$$t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$$

$$t=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$$

Câu c: ĐK $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in Z)$

Đặt t = tanx thì phương trình trở thành

$$2t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \tan x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})(tm)$$

Câu d: ĐK: $\left\{\begin{array}{l} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq k\pi \\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}\,(k\in Z)$

$$\tan x - 2\cot x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan x - \frac{2}{\tan x} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x - 2 = 0$$

Đặt t = tanx thì phương trình trở thành

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)(tm)$$

4. Giải bài 4 trang 37 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau:

a) $2sin^2x + sinxcosx - 3cos^2x = 0$

b) $3sin^2x - 4sinxcosx + 5cos^2x = 2$

c) $3sin^2x - sin2x + 2cos^2x = \frac{1}{2}$

d) $2cos^2x - 3\sqrt{3}sin2x - 4sin^2x = -4$

4.1. Phương pháp giải

Xét phương trình: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$

Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ có là nghiệm của (1) hay không

Xét $\cos x \ne 0,$ chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$
$$\Leftrightarrow (a - d)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0(1')$$

Đặt t = \tan x

Phương trình $(1')$ trở thành: $(a-d)t^2 + bt + c - d = 0(2)$

Giải phương trình (2) theo t từ đó suy ra x theo t = \tan x

4.2. Hướng dẫn giải

Câu a: Ta nhận thấy cosx = 0 không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế cho cos2x ta được

$$\Rightarrow 2tan^2x + tanx - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tanx = 1 \\ tanx = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Câu b: Ta nhận thấy cosx = 0 không là nghiệm của phương trình

$3sin^2x + 4sinxcosx + 5cos^2x = 2,$ nên chia hai vế phương trình cho cos2x ta được: $3tan^2x - 4tanx + 5 = 2(1 + tan^2x)$

$\Leftrightarrow tan^2x - 4tanx + 3 = 0$

Đặt t = tanx

Ta có phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$

$t = 1 \Rightarrow tanx = 1 \Rightarrow tanx = tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$t = 3 \Rightarrow tanx = 3 \Rightarrow x = arctan(3) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = arctan(3) + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Câu c:

$sin^2x + sin2x - 2cos^2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sin^2x + 2sinxcosx - 2cos^2x = \frac{1}{2}$ (3)

$cosx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của (3)

$cosx \neq 0,$ chia hai vế của (3) cho $cos^2x,$ ta được

$\frac{sin^2x}{cos^2x} + \frac{2sinx}{cosx} - 2 = \frac{1}{2cos^2x} \Rightarrow tan^2x + 2tanx - 2 = \frac{1}{2}(1 + tan^2x)$

$\Rightarrow 2tan^2x + 4tanx - 4 = 1 + tan^2x$

$\Rightarrow tan^2x + 4tanx - 5 = 0$

Đặt t = tanx, ta có phương trình

$t = 1 \Rightarrow tanx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$t = -5 \Rightarrow tanx = -5 \Rightarrow x = arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = arctan(-5) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Câu d:

$2cos^2x - 3\sqrt{3}sin2x - 4sin^2x = -4$

$\Leftrightarrow 2cos^2x - 6\sqrt{3}sinxcosx - 4(1 - cos^2x) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2cos^2x - 6\sqrt{3}sinxcosx - 4 + 4cos^2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 6cos^2x - 6\sqrt{3}sinxcosx = 2$

$\Leftrightarrow 6cosx(cosx - \sqrt{3}sinx) = 0$

$\left[\begin{array}{l} cosx = 0 \\ cosx - \sqrt{3}sinx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ cosx = \sqrt{3}sinx \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ tanx=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

5. Giải bài 5 trang 37 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải các phương trình sau

a) $cosx-\sqrt{3}sinx=\sqrt{2}$

b) $3sin3x - 4cos3x = 5$

c) $2sin2x+2cos2x-\sqrt{2}=0$

d) $5cos2x + 12sin2x - 13 = 0$

5.1. Phương pháp giải

Xét phương trình: $a\sin x+b\cos x=c(1)$

Điều kiện có nghiệm: $a^2+b^2\ge c^2$

Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên ta đặt $\left\{\begin{array}{l} \sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right.$

Phương trình trở thành

$$\sin x\sin\varphi+\cos x\cos\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặt $\cos\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ta được phương trình lượng giác cơ bản.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể đặt $\left\{\begin{array}{l} \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right.$

Khi đó phương trình trở thành: $\mathrm{sinxcos}\varphi+cosxsin\varphi=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \sin(x+\varphi)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5.2. Hướng dẫn giải

Câu a: $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sinx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}.\cos x - \cos\frac{\pi}{6}.\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} - x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Câu b: Ta có $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = 1$

Đặt $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$ suy ra

$$\sin(3x - \alpha) = 1 \Leftrightarrow 3x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu c: Ta có

$$2\sin x + 2\text{cosx} - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Câu d: Ta có

$$5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12\sin 2x + 5\cos 2x = 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{13}\sin 2x + \frac{5}{13}\cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = 1 \ \left(\sin\alpha = \frac{5}{13}; \cos\alpha = \frac{12}{13}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

6. Giải bài 6 trang 37 SGK Toán Đại số & Giải tích 11

Giải phương trình

a) $tan(2x+1)\,tan(3x-1)=1$

b) $tanx+tan(x+\frac{\pi}{4})=1$

6.1. Phương pháp giải

Câu a: Sử dụng công thức $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ và $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$ để biến đổi phương trình.

Câu b: Sử dụng công thức $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$; $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\text{cosa}.\sin b$

và $\cos a.\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ để biến đổi phương trình

6.2. Hướng dẫn giải

Câu a

Với điều kiện $\left[\begin{array}{l} 2x+1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 3x-1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ hay $\left[\begin{array}{l} x\neq\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{2} \\ x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow tan(2x+1)tan(3x-1)=1$

$(1)\Leftrightarrow\frac{sin(2x+1)sin(3x-1)}{cos(2x+1)cos(2x-1)}=1$

$\Rightarrow\cos(2x+1)\cos(3x-1)-\sin(2x+1)\sin(3x-1)=0$

$\Leftrightarrow cos(2x+1+3x-1)$

$\Leftrightarrow cos5x=0$

$\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},k\in\mathbb{Z}$ (thoả điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},k\in\mathbb{Z}$

Câu b

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} cosx\neq 0 \\ cos(x+\frac{\pi}{4})\neq 0 \end{array}\right.$

Khi đó $tanx+tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow sinx.cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+cosx.sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=cosx.cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\Leftrightarrow 2sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\Leftrightarrow sin\left(2x+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}-\alpha=arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{4}-\alpha=\pi-arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k\pi\\ x=\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k\pi\end{array}\right.,k\notin\mathbb{Z}$$