BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

LÊ THÀNH HƯNG

SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY HÀM HỮU TỶ VÀ CHUỖI LŨY THỪA HÌNH THỨC

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - NĂM 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

LÊ THÀNH HƯNG

SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY HÀM HỮU TỶ VÀ CHUỖI LŨY THỪA HÌNH THỨC

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TS. Nguyễn Quang Diệu

HÀ NỘI - NĂM 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan Luận án này được thực hiện bởi chính tác giả tại Khoa Toán - Tin Trường Đại học Sư phạm Hà Nội dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TS. Nguyễn Quang Diệu; các kết quả của Luận án là mới, đề tài của Luận án không trùng lặp và chưa từng được công bố trong các công trình công trình khác.

Nghiên cứu sinh

Lê Thành Hưng

Lời cảm ơn

Trước tiên, bằng tất cả sự kính trọng của mình, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới GS. TS. Nguyễn Quang Diệu Người Thầy đã trực tiếp giảng dạy và hướng dẫn khoa học giúp tôi hoàn thành Luận án này tại Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Trong quá trình làm luận án, tôi đã vô cùng may mắn thường xuyên nhận được sự chỉ dẫn khoa học nghiêm túc cùng với sự chia sẻ, động viên khích lệ của thầy để tôi có được sự tự tin và lòng đam mê ngay từ chặng đường đầu tiên của sự nghiệp nghiên cứu khoa học của mình.

Được làm việc thường xuyên cùng một tập thể khoa học nghiêm túc, tôi vô cùng biết ơn các thầy, các bạn đồng nghiệp và toàn thể các thành viên của Seminar của Bộ môn Lý thuyết hàm Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đặc biệt là GS. TSKH. Lê Mậu Hải, TS Tăng Văn Long và PGS. TS. Phùng Văn Mạnh về những chỉ dẫn và góp ý trực tiếp về đề tài của luận án.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn Trường Cao đẳng Vĩnh Phúc, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và các đơn vị chức năng đã tạo cho tôi mọi điều kiện thuận lợi về mặt quản lý nhà nước trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Hà Nội, tháng 5 năm 2018

NCS. Lê Thành Hưng

Mục lục

KÍ HIỆU

- $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ - Tập các hàm trơn vô hạn trên Ω
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ - Tập các hàm liên tục α-Hölder trên Ω
- $L^{\infty}(\Omega)$ - Không gian các hàm bị chặn trên Ω
- $L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ - Không gian các hàm bị chặn địa phương trên Ω
- $PSH(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới trên Ω
- $PSH^{-}(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới âm trên Ω
- $MPSH(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên Ω
- $SH(\Omega)$ - Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω
- $HPSH(\mathbb{C}^n)$ là tập các hàm đa điều hòa dưới thuần nhất trên $\mathbb{C}^n$.
- $\text{cap}(E, D) = \sup\{\int_E (dd^c u)^n : u \in PSH(D), -1 < u < 0\}$.-Dung lượng tương đối của tập Borel E trong D
- $\{h_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm nhận giá trị thực, $\mathcal{C}^1-$trơn được định nghĩa trên $(0, \infty)$
- $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$ nhận giá trị thực, liên tục xác định trên $[0, \infty)$
- $u_j \uparrow u$ - Kí hiệu dãy $\{u_j\}$ hội tụ tăng tới u
- $u_j \downarrow u$ - Kí hiệu dãy $\{u_j\}$ hội tụ giảm tới u
- $1_A = \chi_A$ - Kí hiệu hàm đặc trưng của tập A

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Các dạng hội tụ của hàm hữu tỷ trong $\mathbb{C}^n$ là một phần quan trọng của giải tích phức hiện đại, đây là một lĩnh vực hay vì nó có nhiều ứng dụng trong thực tế và làm tiền đề cho việc nghiên cứu các vấn đề khác. Một trong những bài toán cổ điển đồng hành cùng quá trình phát triển của Giải tích toán học đó là bài toán liên quan đến tính hội tụ của các dãy hàm. Các vấn đề liên quan đến tính hội tụ của dãy hàm đặt ra thường là để trả lời các câu hỏi: Các dãy hàm đã cho có hội tụ hoặc hội tụ đều hay không? và hội tụ hay hội tụ đều đến hàm nào? hàm đó đã biết hay chưa biết? giả thiết như thế nào thì dãy hàm hội tụ nhanh, nhanh đều? Hội tụ điểm thì hội tụ đều? v.v... Trong lý thuyết Giải tích phức, tính hội tụ, hội tụ đều của các dãy hàm có liên quan chặt chẽ tới cực của nó. Những năm gần đây bằng cách sử dụng một số công cụ của lý thuyết đa thế vị các nhà toán học ở Việt Nam và trên thế giới đã chứng minh được rất nhiều kết quả quan trọng có tính ứng dụng cao như Gonchar, T. Bloom, Z. Blocki, Molzon, Alexander...ở Việt Nam có Nguyễn Quang Diệu, Lê Mậu Hải, Nguyễn Xuân Hồng, Phạm Hoàng Hiệp...

Định lý Montel cổ điển khẳng định rằng mọi hàm chỉnh hình bị chặn đều trên các tập compact của tập mở D trong $\mathbb{C}^n$ là compact tương đối trong tô pô mở compact. Một kết quả mở rộng thú vị của định lý này là định lý hội tụ Vitali (tìm ra đầu thế kỷ 20) nói rằng nếu chúng ta giả thiết thêm là dãy hàm đã cho *hội tụ điểm* trên một tập S đủ lớn thì dãy này phải hội tụ đều trên tập compact của miền xác định của nó. Một vấn đề tự nhiên đặt ra là liệu ta có thể thay giả thiết *bị chặn đều* bởi tốc độ hội tụ của dãy hàm xấp xỉ được không? Để làm rõ hơn câu hỏi này, chúng ta cần nhắc lại một số kết quả của Gonchar (vào những năm 70 của thế kỷ trước). Cho $\mathcal{R}$ là tập các hàm chỉnh hình f trong lân cận của U của $0 \in \mathbb{C}^n$ mà có thể xấp xỉ nhanh theo độ đo bởi dãy các hàm hữu tỷ $\{r_m\}_{m\geq 1}, degr_m \leq m$.

Bằng cách sử dụng khai triển Taylor ta có thể chứng minh được rằng mọi hàm phân hình trên $\mathbb{C}^n$ và chỉnh hình trong lân cận của 0 đều thuộc lớp $\mathcal{R}$. Khái niệm trên được đưa ra bởi Gonchar vào cuối những năm 70 của thế kỷ trước nhằm nghiên cứu cấu trúc của *miền tồn tại* đối với hàm chỉnh hình f. Gonchar đã chứng minh rằng nếu f được xấp xỉ nhanh bởi r_m thì miền tồn tại của f là *đơn trị* tức là một tập con của $\mathbb{C}^n$.

Hơn 20 năm sau, bằng cách sử dụng một số công cụ của lý thuyết đa thế vị, Bloom đã chứng minh định lý của Gonchar vẫn còn đúng nếu thay hội tụ nhanh theo độ đo bởi hội tụ nhanh theo dung lượng tương đối. Các kết quả về xấp xỉ nhanh hàm chỉnh hình còn có ứng dụng trong việc xây dựng bao đa cực các tập đa cực trong $\mathbb{C}^n$ cũng như các bài toán thác triển hàm chỉnh hình. Có thể thấy vấn đề hội tụ và xấp xỉ của dãy hàm chỉnh hình và đa điều hòa dưới là một trong những vấn đề truyền thống của giải tích và có ứng dụng vào nhiều bài toán khác nhau của giải tích thực và phức.

Tiếp tục hướng nghiên cứu đó, trong luận án này này chúng tôi nghiên cứu Định lý hội tụ kiểu Vitali đối với các hàm chỉnh hình, sự hội tụ của chuỗi lũy thừa hình thức và sự hội tụ của dãy các hàm hữu tỷ trong $\mathbb{C}^n$. Các kết quả liên quan đến đề tài này có thể tìm thấy trong công trình được sử dụng trong luận án.

2. Mục đích nghiên cứu của Luận án

Từ những kết quả quan trọng đã có về sự hội tụ của các dãy hàm hữu tỷ trong $\mathbb{C}^n$ được nghiên cứu gần đây, chúng tôi đã đặt ra một số mục đích nghiên cứu cho Luận án như sau:

- Định lý hội tụ kiểu Vitali đối với các dãy hàm chỉnh hình không bị chặn đều.

- Đưa ra một dãy hàm hữu tỷ hội tụ nhanh ở đó sự hội tụ chỉ cần xét trên biên.

- Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$.

- Sự hội tụ của dãy các hàm hữu tỷ trong $\mathbb{C}^n$.

- Cố gắng mở rộng hoặc nêu ra hướng mở rộng các kết quả nghiên cứu trong trường hợp có thể thực hiện được.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Các tính chất và kết quả cơ bản về sự hội tụ của các hàm chỉnh hình, các hàm hữu tỷ, các hàm đa điều hòa dưới.

- Các tính chất của chuỗi lũy thừa hình thức và điều kiện cho sự hội tụ của nó.

- Các hàm hữu tỉ và điều kiện đủ cho sự hội tụ của nó.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong nghiên cứu toán học cơ bản với công cụ và kỹ thuật truyền thống của lý thuyết chuyên ngành Giải tích hàm và Giải tích phức.

- Tổ chức seminar, trao đổi, thảo luận, công bố các kết quả nghiên cứu theo tiến trình thực hiện đề tài Luận án, nhằm thu nhận các xác nhận về tính chính xác khoa học của các kết quả nghiên cứu trong cộng đồng các nhà khoa học chuyên ngành trong và ngoài nước.

5. Những đóng góp của Luận án

Luận án đã đạt được các mục đích nghiên cứu đề ra. Kết quả của Luận án góp phần nhỏ vào hệ thống các kết quả, phương pháp, công cụ và kỹ thuật nghiên cứu liên quan đến sự hội tụ, hội tụ đều, hội tụ nhanh, hội tụ theo dung lượng của các hàm chỉnh hình, hàm đa điều hòa dưới, các hàm hữu tỷ và sự hội tụ của chuỗi lũy thừa hình thức.

- Đưa ra được một số công cụ, kỹ thuật và phương pháp nghiên cứu để đạt được mục đích nghiên cứu đã đề ra.

- Đưa ra một số hướng nghiên cứu tiếp theo của đề tài Luận án.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của Luận án

Kết quả khoa học của Luận án góp một phần nhỏ vào việc hoàn thiện lý thuyết liên quan đến sự hội tụ của hàm chỉnh hình, hàm hữu tỷ trong Giải tích phức. Về mặt phương pháp, Luận án góp phần nào đó, làm đa dạng hóa hệ thống các công cụ và kỹ thuật nghiên cứu chuyên ngành, áp dụng cụ thể trong đề tài của Luận án và các chủ đề tương tự.

7. Cấu trúc của luận án

Cấu trúc của Luận án được trình bày theo đúng quy định cụ thể đối với luận án tiến sỹ của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, bao gồm các phần: Mở đầu, Tổng quan, các chương trình bày các kết quả nghiên cứu, Kết luận, Danh mục công trình trong luận án, Tài liệu tham khảo. Nội dung chính của Luận án gồm bốn chương có tên và nội dung tóm tắt như sau:

Chương 1. Tổng quan Luận án.

Phần đầu của Chương này chúng tôi dành cho việc trình bày tổng quan của luận án phần sau là các khái niệm và các tính chất cơ bản về tính hội tụ, hội tụ đều, hội tụ theo dung lượng của các hàm chỉnh hình, hàm đa điều hòa dưới và hàm hữu tỷ.

Chương 2. Định lý hội tụ kiểu Vitali đối với các dãy hàm chỉnh hình không bị chặn đều

Chương 3. Hội tụ của chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$

Chương 4. Hội tụ của dãy các hàm hữu tỷ trên $\mathbb{C}^n$

Cuối cùng, trong phần Kết luận, chúng tôi điểm lại các kết quả nghiên cứu chính trình bày trong Luận án. Đồng thời, trong Phần Kiến nghị chúng tôi mạnh dạn nêu ra một vài ý tưởng nghiên cứu tiếp theo phát triển đề tài của Luận án này. Chúng tôi hy vọng sẽ nhận được nhiều sự quan tâm và chia sẻ của đồng nghiệp giúp hoàn thiện các kết quả nghiên cứu.

Chương 1

Tổng quan các vấn đề nghiên cứu

Luận án nghiên cứu ba vấn đề xoay quanh sự hội tụ của dãy các hàm hữu tỷ và các chuỗi lũy thừa hình thức, ta sẽ lần lượt trình bày tóm tắt các vấn đề này cho bạn đọc dễ theo dõi.

1.1 Định lý hội tụ kiểu Vitali đối với các dãy hàm chỉnh hình không bị chặn đều

Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm chỉnh hình xác định trên D. Một định lý cổ điển của Vitali khẳng định rằng nếu $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn đều địa phương và nếu nó hội tụ điểm trên một tập con X của D không chứa trong bất kỳ siêu phẳng phức của D thì $\{f_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ đều trên các tập compact của D. Ta chú ý rằng giả thiết về tính bị chặn đều của $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là cần thiết. Thật vậy, sử dụng định lý xấp xỉ Runge, ta có thể xây dựng một dãy các đa thức trên $\mathbb{C}$ hội tụ điểm tới 0 trên toàn miền $\mathbb{C}$, ngoại trừ điểm tại gốc có giới hạn là 1.

Vấn đề chúng tôi quan tâm là việc tìm ra các kết quả tương tự như định lý Vitali được nhắc đến ở trên cho trường hợp không cần đến tính bị chặn đều địa phương của $\{f_m\}_{m\geq 1}$. Gonchar đã chứng minh trong Định lý 2 của [9] một kết quả đáng chú ý sau.

Định lý 1.1.1. *Cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỷ trong $\mathbb{C}^n$ ($deg r_m \leq m$) hội tụ nhanh theo độ đo trên một tập mở X tới một hàm chỉnh hình f được xác định trên một miền bị chặn D ($X \subset D$), nghĩa là với mỗi $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{2n}(z \in X : |r_m(z) - f(z)|^{1/m} > \varepsilon) = 0,$$

ở đó λ_{2n} là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Khi đó $\{r_m\}_{m\geq 1}$ cũng hội tụ nhanh theo độ đo tới f trên toàn miền D.

Sau đó, bằng cách sử dụng các kỹ thuật của lý thuyết đa thế vị, Bloom đã chứng minh một kết quả tương tự đối với sự hội tụ nhanh theo dung lượng mà tập X chỉ đòi hỏi là compact và không-đa cực (xem Định lý 2.1 trong [5]). Chính xác hơn, ta có định lý sau đây của Bloom.

Định lý 1.1.2. *Cho f là một hàm chỉnh hình được xác định trên một miền bị chặn $D \subset \mathbb{C}^n$. Cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỷ ($deg r_m \leq m$) hội tụ nhanh theo dung lượng tới f trên một tập con Borel không đa cực X của D, theo nghĩa: với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có*

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}\left(\{z \in X : |r_m(z) - f(z)|^{1/m} > \varepsilon\}, D\right) = 0.$$

Khi đó $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ tới hàm f nhanh theo dung lượng trên D nghĩa là, *với mỗi tập con Borel E của D và với mỗi $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{m\to\infty} \text{cap}\left(\{z \in E : |r_m(z) - f(z)|^{1/m} > \varepsilon\}, D\right) = 0.$$

Sử dụng kết quả liên quan đến hội tụ theo dung lượng và hội tụ điểm (xem Bổ đề 2.1.2), ta có thể kiểm tra được kết quả của Định lý 1.1.1 được suy ra từ Định lý 1.1.2 (xem Định lý 2.2 trong [5]). Các định lý trên của Gonchar và Bloom là ý tưởng chính cho nghiên cứu của chúng tôi. Kết quả đầu tiên của luận án, Định lý 2.2.1, khẳng định rằng nếu một dãy hàm chỉnh hình bị chặn hội tụ đủ nhanh trên một tập không đa cực thì nó cũng hội tụ nhanh đều trên các tập compact. Ở đó tốc độ của sự xấp xỉ được đo theo độ tăng của chuẩn sup của f_m. Kết quả tiếp theo, tương tự như trong kết quả của Định lý 1.1.1 và 1.1.2, là hai dạng của định lý Vitali cho dãy hàm hữu tỉ. Trong Định lý 2.2.4 ta xét một dãy $\{r_m\}_{m\geq 1}$ của các hàm hữu tỷ mà nó hội tụ điểm nhanh trên một tập con Borel không đa cực của $\mathbb{C}^n$ tới một hàm đo được bị chặn. Với điều kiện bổ sung về bậc của mẫu số r_m tiến tới ∞ chậm hơn m, ta có thể chứng minh được $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ nhanh trên $\mathbb{C}^n$ tới một hàm đo được f. Kết quả chính tiếp theo của chương này (Định lý 2.2.6), khi dãy $\{r_m\}_{m\geq 1}$ đề cập tới trường hợp hội tụ nhanh tới giá trị biên của một hàm chỉnh hình bị chặn f xác định trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{C}^n$. Theo kết quả của định lý này ta có thể xây dựng ở Mệnh đề 2.3.2 một hàm chỉnh hình bị chặn f trên đĩa đơn vị Δ và dãy hàm hữu tỷ $\{r_m\}_{m\geq 1}$ với cực nằm ngoài $\overline{\Delta}$ sao cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ điểm nhanh tới f^*, giá trị biên của f, trên một tập con compact $F \subset \partial\Delta$ có độ đo dương. Tuy nhiên, hàm f không được thác triển chỉnh hình qua bất cứ điểm nào của F. Cụ thể, các kết quả chính trong Chương 2 của luận án là:

Định lý 2.2.1. *Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm chỉnh hình bị chặn trên D. Giả sử rằng tồn tại một dãy tăng $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$ của các số dương thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) $\|f_{m+1} - f_m\|_D \leq e^{\alpha_m}$;

(ii) $\alpha := \inf_{m\geq 1}(\alpha_{m+1} - \alpha_m) > 0$;

(iii) Tồn tại một tập con Borel không-đa cực X của D và một hàm đo được bị chặn $f : X \to \mathbb{C}$ sao cho

$$|f_m(x) - f(x)|^{1/\alpha_m} \to 0, \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Khi đó, ta có các khẳng định sau:

(a) $\{f_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ đều trên các tập compact của D tới hàm chỉnh hình f.

(b) Với mỗi tập con compact K của D ta có $\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_K^{1/\alpha_m} = 0$.

Một kết quả tiếp theo của chúng tôi là định lý sau.

Định lý 2.2.4. *Cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỷ trên $\mathbb{C}^n$ thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) Tồn tại một tập con Borel không-đa cực X của $\mathbb{C}^n$ và một hàm đo được bị chặn $f : X \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\lim_{m\to\infty} |r_m(x) - f(x)|^{1/m} = 0,\ \forall x \in X;$$

(ii) Với mỗi $z_0 \in \mathbb{C}^n$, tồn tại hình cầu mở $\mathbb{B}(z_0, r), m_0 \geq 1$ và $\lambda \in (0, 1)$ sao cho

$$deg(V_m \cap \mathbb{B}(z_0, r)) \leq m^\lambda,\ \forall m \geq m_0,$$

ở đó V_m là các tập cực của r_m.

Khi đó, tồn tại một hàm đo được $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sao cho $|r_m - F|^{1/m}$ hội tụ điểm tới 0 ở ngoài một tập có độ đo Lebesgue bằng 0.

Kết quả tiếp theo trong hướng nghiên cứu này là một dạng mở rộng định lý của Bloom (Định lý 1.1.2) khi sự hội tụ chỉ được xét trên biên của miền bị chặn.

Định lý 2.2.6. *Cho D là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $X \subset \partial D$ là một tập con compact. Giả sử f là một hàm chỉnh hình bị chặn trên D và $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỉ trên $\mathbb{C}^n$. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $x \in X$, điểm $rx \in D$ với $r < 1$ đủ gần 1. Hơn nữa, nếu $u \in PSH(D), u < 0$ và thỏa mãn

$$\lim_{r\to 1^-} u(rx) = -\infty, \ \forall x \in X$$

thì $u \equiv -\infty$;

(ii) Với mọi $x \in X$, tồn tại giới hạn

$$f^*(x) := \lim_{r\to 1^-} f(rx);$$

(iii) Dãy $|r_m - f^*|^{1/m}$ hội tụ điểm tới 0 trên X.

Khi đó ta có các khẳng định sau:

(a) Dãy $|r_m - f|^{1/m}$ hội tụ theo dung lượng tới 0 trên D.

(b) Tồn tại tập con đa cực E của $\mathbb{C}^n$ có tính chất sau: Với mỗi $z_0 \in D \setminus E$ và mọi không gian con affine phức L của $\mathbb{C}^n$ đi qua z_0, tồn tại một dãy con $\{r_{m_j}\}_{j\geq 1}$ sao cho $|r_{m_j} - f|_{D_{z_0}}^{1/m_j}$ hội tụ tới 0 theo dung lượng (liên quan đến L). Ở đó D_{z_0} là thành phần liên thông của $D \cap L$ chứa z_0.

Kết quả cuối cùng của chương này sẽ đưa ra ví dụ mà Định lý 2.2.6 có thể áp dụng được.

Mệnh đề 2.3.2. *Tồn tại một tập con đếm được A của $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ với $F \subset \bar{A}$, một dãy $\{r_m\}_{m\geq 1}$ của các hàm hữu tỉ trên $\mathbb{C}$ và một hàm chỉnh hình*

$f : \mathbb{C} \setminus \overline{A} \to \mathbb{C}$ bị chặn trên Δ thỏa mãn các tính chất sau:

(a) Các cực của $\{r_m\}_{m\geq 1}$ đều nằm trong A với mỗi $m \geq 1$.

(b) $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ nhanh đều tới f trên các tập compact của $\mathbb{C} \setminus \overline{A}$.

(c) $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ điểm nhanh trên $F := \overline{A} \setminus A$ tới f^*, với f^* là hàm giá trị biên của f.

(d) f bị chặn trên Δ nhưng không mở rộng chỉnh hình qua bất cứ điểm nào của F.

1.2 Hội tụ của chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$

Cho $f(z_1, \cdots, z_n) = \sum a_{\alpha_1\cdots\alpha_n} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ là một chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. Một bài toán tự nhiên là nghiên cứu những điều kiện để chuỗi lũy thừa hình thức này hội tụ (tuyệt đối) trên một lân cận nào đó của điểm gốc. Trong các thành tựu đã đạt được, ta cần nhắc đến kết quả của Molzon và Levenberg (Định lý 4.1 trong [14]), ở đó họ đã chỉ ra rằng nếu hạn chế của f trên một số đủ nhiều các đường thẳng phức đi qua điểm gốc mà hội tụ trên lân cận của $0 \in \mathbb{C}$ thì f biểu diễn một hàm chỉnh hình trong lân cận của $0 \in \mathbb{C}^n$. Bên cạnh đó cũng tồn tại các đặc trưng của các tập hội tụ cho chuỗi lũy thừa được đưa ra trong [20] và [16]. Mặt khác, bằng cách sử dụng các đánh giá tinh tế về thể tích của các tập giải tích phức trong các không gian xạ ảnh, Alexander đã chứng minh trong Định lý 6.1 của [2] rằng một dãy $\{f_m\}_{m\geq 1}$ các hàm chỉnh hình trên hình cầu đơn vị $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ là hội tụ đều trên các tập compact của $\mathbb{B}_n$ nếu hạn chế $\{f_m|_{l_a}\}_{m\geq 1}$ là hội tụ trên các tập compact (của đĩa đơn vị) với mỗi $a \in \mathbb{C}^n$, ở đó ta kí hiệu l_a là đường thẳng phức $\mathbb{C}a$.

Kết quả chính của chúng tôi là Định lý 3.2.2, đưa ra một điều kiện trên tập A trong $\mathbb{C}^n$ sao cho với bất kỳ dãy chuỗi lũy thừa hình thức $\{f_m\}_{m\geq 1}$ mà $\{f_m|_{l_a}\}_{m\geq 1}(a \in A)$ là một dãy hội tụ trên một đĩa có bán kính r_0 với tâm tại $0 \in \mathbb{C}$ sẽ biểu diễn một dãy các hàm chỉnh hình hội tụ trên một hình cầu trong $\mathbb{C}^n$ có bán kính r_1. Hơn nữa, phương pháp chứng minh của chúng tôi cũng cho một đánh giá của r_1 theo r_0 và A. Điều này có thể được xem xét như kết quả tổng quát của các định lý của Molzon-Levenberg và Alexander đã nhắc đến ở trên. Có thể nói rằng công việc của chúng tôi được đặt nền móng từ một kết quả cổ điển của Hartogs trong [11], mà nó chỉ ra rằng một chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$ là hội tụ nếu nó hội tụ trên tất cả các đường thẳng qua điểm gốc.

Định lý 3.2.2. *Cho $A \subset \mathbb{C}^n$ là một tập đa cực không xạ ảnh và $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$ và r_0 là một số dương. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(a) Nếu với mỗi $a \in A$, hạn chế của $\{f_m\}_{m\geq 1}$ trên l_a là một dãy các hàm chỉnh hình bị chặn đều địa phương trên đĩa $\Delta(0, r_0) \subset \mathbb{C}$ thì tồn tại $r_1 > 0$ (chỉ phụ thuộc vào r_0, A) sao cho $\{f_m\}_{m\geq 1}$ biểu diễn một dãy hàm chỉnh hình bị chặn đều địa phương trên đa đĩa $\Delta^n(0, r_1)$.

(b) Nếu với mỗi $a \in A$ hạn chế của $\{f_m\}_{m\geq 1}$ trên l_a là một dãy hàm chỉnh hình trên đĩa $\Delta(0, r_0) \subset \mathbb{C}$ hội tụ đều trên các tập compact thì tồn tại $r_1 > 0$ (chỉ phụ thuộc vào r_0, A) sao cho $\{f_m\}_{m\geq 1}$ xác định một dãy hàm chỉnh hình mà nó hội tụ đều trên các tập compact của $\Delta^n(0, r_1)$.

Sử dụng kết quả chính này, ta nhận được một tính chất mở rộng cho các hàm chỉnh hình được định nghĩa trên các đường thẳng phức đi qua điểm gốc chỉ với giả thiết rằng chúng là vết của các hàm $\mathcal{C}^{\infty}$ - trơn trong lân cận của gốc.

Hệ quả 3.2.4. *Cho $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm khả vi vô hạn xác định trên hình cầu đơn vị $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ và $A \subset \partial\mathbb{B}_n$ là một tập mở. Giả sử với mỗi $a \in A$, hạn chế của $\{f_m\}_{m\geq 1}$ trên l_a được thác triển tới dãy hàm nguyên trên $\mathbb{C}$ và hội tụ đều trên các tập compact của $\mathbb{C}$. Khi đó tồn tại dãy hàm nguyên $\{F_m\}_{m\geq 1}$ trên $\mathbb{C}^n$ hội tụ đều trên các tập compact trong $\mathbb{C}^n$ sao cho với $m \geq 1$, $F_m = f_m$ trên $\mathbb{B}_n \cap l_a$ với mọi $a \in A$.*

1.3 Hội tụ của dãy các hàm hữu tỷ trên $\mathbb{C}^n$

Ta xét f là một hàm chỉnh hình trên D và $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỷ sao cho r_m hội tụ điểm tới f trên một tập con khác rỗng X của D. Chúng ta luôn giả sử rằng $1 \leq degr_m \leq m$, nghĩa là, tử số và mẫu số của r_m là các đa thức khác hằng có bậc cao nhất là m. Chúng tôi quan tâm tới vấn đề tìm các điều kiện để nếu $r_m|_X \to f|_X$ dẫn đến sự hội tụ $r_m|_D \to f|_D$. Theo một định lý cổ điển của Vitali (xem Mệnh đề 7 trang 9 trong [17]), nếu dãy $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn đều trên các tập compact của D (trong trường hợp đặc biệt, r_m không có cực trên D với mỗi m) và nếu X không được chứa trong bất kỳ tập con giải tích của D thì r_m hội tụ đều tới f trên các tập compact của D. Xuất phát từ những kết quả đã biết của Gonchar và Bloom (xem Định lý 2 trong [9] và Định lý 2.1 trong [5]), chúng tôi sẽ đưa ra những kết quả tổng quát hơn, mà ở đó sự hội tụ nhanh được thay thế bởi sự hội tụ có trọng. Chính xác hơn, với một tập $\mathcal{A}$ của các hàm xác định trên $[0, \infty)$ và một dãy các hàm $\{f_m\}$ được xác định trên D, ta nói rằng f_m hội tụ tới f trên $E \subset D$ đối với $\mathcal{A}$ nếu $\chi(|f_m - f|^2)$ hội tụ điểm tới 0 trên E với mọi $\chi \in \mathcal{A}$. Bây giờ chúng tôi quan tâm tới việc tìm các điều kiện thích hợp trên $\mathcal{A}$ và E sao cho nếu f_m hội tụ tới f trên $E \subset D$ đối với $\mathcal{A}$ thì dãy $\{f_m\}$ hội tụ tới f trên D.

Khái niệm sau đây đóng vai trò then chốt trong cách tiếp cận của chúng tôi. Ta nói rằng một dãy các hàm $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$ nhận giá trị thực, liên tục được xác định trên $[0, \infty)$ là *chấp nhận được* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(1.1) $\chi_m > 0$ trên $(0, \infty)$ và với mỗi dãy $\{a_m\} \subset [0, \infty)$

$$\inf_{m\geq 1} \chi_m(a_m) = 0 \Rightarrow \inf_{m\geq 1} a_m = 0.$$

(1.2) Với mỗi $m \geq 1, \chi_m$ là $\mathcal{C}^2-$trơn trên $(0, \infty)$ và

$$\chi_m(t)(\chi'_m(t) + t\chi''_m(t)) \geq t(\chi'_m(t))^2 \ \forall t \in (0, \infty).$$

(1.3) Tồn tại một dãy các hàm nhận giá trị thực, liên tục $\{\tilde{\chi}_m\}$ xác định trên $[0, \infty)$ thỏa mãn (1.1), (1.2) và tính chất sau

$$\sup_{m\geq 1} \sup_{0<x<a, 0<y<a} (\chi_m((x/y)^m)\tilde{\chi}(y^m)) < \infty \ \forall a > 0.$$

Kết quả chính của chúng tôi là một mở rộng của Định lý 2.1 trong [5] mà ở đó sự hội tụ nhanh được thay thế bởi sự hội tụ điểm đối với một dãy trọng chấp nhận được nào đó. Nghĩa là, với giả thiết rằng $\chi_m(|r_m - f|^2)$ hội tụ điểm tới 0 trên một tập Borel không-đa cực X với một dãy chấp nhận được $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$, ta chỉ ra rằng $\chi_m(|r_m - f|^2)$ hội tụ tới 0 theo dung lượng trên D. Cụ thể hơn, chúng tôi đã chứng minh được định lý sau.

Định lý 4.2.1. *Cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm hữu tỉ xác định trên $\mathbb{C}^n, f$ là một hàm chỉnh hình xác định trên miền $D \subset \mathbb{C}^n$ và $\mathcal{A} := \{\chi_m\}_{m\geq 1}$ là dãy chấp nhận được. Giả sử rằng $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ điểm tới f trên một tập con Borel không đa cực X của D. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(a) $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ theo dung lượng tới f trên D.

(b) Tồn tại một tập con đa cực E của $\mathbb{C}^n$ với tính chất: Với mỗi $z_0 \in D \setminus E$ và với mọi không gian con affine phức L của $\mathbb{C}^n$ đi qua z_0, tồn tại một dãy $\{r_{m_j}\}_{j\geq 1}$ (chỉ phụ thuộc vào z_0) sao cho $r_{m_j}\big|_{D_{z_0}}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ theo dung lượng (đối với D_{z_0}) tới $f|_{Dz_0}$, ở đó D_{z_0} là thành phần liên thông của $D \cap L$ chứa z_0.

(c) Giả sử rằng với mỗi $a > 0$ ta có $\inf\limits_{m\geq 1} \chi_m(a^m) > 0$. Khi đó dãy $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ đều tới f trên mọi tập con compact K của D sao cho r_m không có cực trên một lân cận mở U cố định của K với mỗi m.

Chúng tôi kết thúc vấn đề này bởi việc đưa ra ví dụ về dãy chấp nhận được thỏa mãn giả thiết của Định lý 4.2.1.

Mệnh đề 4.2.7. *Cho $\{h_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm trơn giá trị thực lớp $\mathcal{C}^1$ xác định trên $(0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(a) h_m là dãy tăng;

(b) $0 < h_m(t) \leq \frac{1}{2m}\ \forall m \geq 1, \forall t > 0.$

Khi đó, dãy $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$ xác định bởi

$$\chi_m(t) := e^{\int_1^t \frac{h_m(x)}{x} dx}, t > 0,$$

là chấp nhận được và thỏa mãn điều kiện được cho trong Định lý 4.2.1 (c).

Chương 2

Định lý hội tụ kiểu Vitali đối với các dãy hàm chỉnh hình không bị chặn đều

Ta sẽ tìm các điều kiện đủ để một dãy các hàm hữu tỷ hay chỉnh hình xác định trên một tập mở D trong $\mathbb{C}^n$ mà hội tụ điểm trên một tập không quá nhỏ là hội tụ theo dung lượng hay hội tụ đều địa phương trên D.

Nội dung chương này viết dựa trên kết quả của bài báo [1] trong Danh mục các công trình sử dụng trong luận án.

2.1 Một số kết quả bổ trợ

Để thuận tiện cho việc theo dõi, ta hệ thống lại một số vấn đề cơ bản của lý thuyết đa thế vị sẽ được cần dùng cho các phần sau.

Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Hàm nửa liên tục trên $u : D \to [-\infty, \infty)$ được gọi là đa điều hòa dưới nếu hạn chế của u trên $D \cap l$ là hàm điều hòa dưới với mỗi đường thẳng phức l. Tập hợp các hàm đa điều hòa dưới trên D kí hiệu là $PSH(D)$.

Hàm $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ gọi là đa điều hòa dưới thuần nhất nếu

$$u(\lambda z) = \log|\lambda| + u(z),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Kí hiệu $HPSH(\mathbb{C}^n)$ là tập các hàm đa điều hòa dưới thuần nhất trên $\mathbb{C}^n$.

Tập con E của $\mathbb{C}^n$ được gọi là đa cực nếu với mỗi $z_0 \in E$ tồn tại một lân cận mở liên thông U của z_0 và $u \in PSH(U), u \not\equiv -\infty$ sao cho $u \equiv -\infty$ trên $E \cap U$. Theo định lý cổ điển của Josefson, nếu E là tập đa cực khi đó tồn tại hàm đa điều hòa dưới u được xác định toàn cục trên $\mathbb{C}^n$ sao cho $u \equiv -\infty$ trên E. Rõ ràng một tập giải tích con của D là đa cực. Mặt khác, không khó để chứng minh rằng bất kì tập con của $\mathbb{C}^n$ với độ đo Lebesgue dương là không đa cực. Để chứng minh tập đóng Borel đo được là không đa cực ta có thể tham khảo kết quả của Bedford và Taylor (xem [13] trang 120).

Ta đặt $\mathrm{cap}(E, D)$ là dung lượng tương đối của tập con Borel E trong D được xác định như sau:

$$\mathrm{cap}(E, D) = \sup\{\int_E (dd^c u)^n : u \in PSH(D), -1 < u < 0\}.$$

Ta biết rằng dung lượng tương đối có một số tính chất thú vị quan trọng như tính chất cộng tính dưới và đơn điệu dưới một dãy tăng. Hơn nữa, một kết quả sâu sắc trong lý thuyết của Bedford-Taylor đã chỉ ra rằng những tập con đa cực của D có dung lượng tương đối triệt tiêu. Ta thường xuyên sử dụng bất đẳng thức Bernstein-Walsh (xem [21]) với giả thiết rằng nếu K, L là các tập compact trong $\mathbb{C}^n$ và K không đa cực, khi đó tồn tại $C_{K,L} > 0$ chỉ phụ thuộc trên K và L sao cho với bất kì đa thức p_m trong $\mathbb{C}^n$ có bậc lớn nhất m,

$$\frac{1}{m}\log\|p_m\|_L \leq \frac{1}{m}\log\|p_m\|_K + C_{K,L}. \tag{2.1}$$

Ta nhắc lại sau đây một số tính chất cơ bản về sự hội tụ của các hàm đo được.

Định nghĩa 2.1.1. *Cho $\{f_m\}_{m\geq 1}, f$ là hàm đo được với giá trị phức được xác định trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{C}^n$. Ta nói rằng dãy $\{f_m\}_{m\geq 1}$*
(i) hội tụ theo dung lượng tới f trên $X \subset D$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{cap}(X_{m,\varepsilon}, D) = 0,$$

ở đó $X_{m,\varepsilon} := \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon\}$;
(ii) hội tụ theo dung lượng tới f trên D nếu tính chất (i) thỏa mãn với mọi tập con compact X của D.

Chúng ta có kết quả sau đây về hội tụ theo dung lượng và hội tụ điểm.

Bổ đề 2.1.2. *Cho $\{f_m\}_{m\geq 1}$ và f là hàm đo được với giá trị phức xác định trên miền $D \subset \mathbb{C}^n$. Nếu $\{f_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ theo dung lượng tới f trên một tập con Borel X của D, thì tồn tại một dãy con $\{f_{m_j}\}_{j\geq 1}$ và một tập con đa cực $E \subset X$ sao cho $\{f_{m_j}\}_{j\geq 1}$ hội tụ điểm tới f trên $X \setminus E$.*

Chứng minh. Giả sử $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy hội tụ theo dung lượng tới f trên X. Với mỗi $\varepsilon > 0$, giả thiết cho

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{cap}(X_{m,\varepsilon}, D) = 0,$$

ở đó $X_{m,\varepsilon} := \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. Do đó, ta có thể tìm được một dãy tăng thực sự $\{m_k\}$ sao cho

$$\operatorname{cap}(X_{m,\frac{1}{2^k}}, D) < \frac{1}{2^k}, \quad \forall m \geq m_k.$$

Đặt $E_j := \cup_{k=j}^{\infty} X_{m_k,\frac{1}{2^k}}$ và $E := \cap_{j=1}^{\infty} E_j$. Bởi tính chất cộng tính dưới của dung lượng tương đối, ta có

$$\operatorname{cap}(E, D) \leq \operatorname{cap}(E_j, D) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \operatorname{cap}(X_{m_k,\frac{1}{2^k}}, D) < \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}}, \quad \forall j \geq 1.$$

Từ đó, suy ra $\operatorname{cap}(E, D) = 0$. Do đó E là tập đa cực. Bây giờ, cho $z \in X \setminus E$, sử dụng định nghĩa của E_j ta dễ dàng kiểm tra được $\lim\limits_{k\to\infty} f_{m_k}(z) = f(z)$. Ta có điều cần chứng minh. $\square$

Ta chỉ ra rằng rằng tồn tại một dãy hội tụ điểm mà nó không chứa dãy con hội tụ theo dung lượng. Thật vậy, đặt $\{A_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các tập con rời nhau từng đôi một của đĩa đơn vị $\Delta \subset \mathbb{C}$ sao cho $\inf_{m\geq 1} \operatorname{cap}(A_m, \Delta) > 0$. Khi đó dãy các hàm đặc trưng $\{\chi_{A_m}\}_{m\geq 1}$ là dãy thỏa mãn khẳng định trên.

Ta thường xuyên sử dụng kết quả nền tảng của Bedford và Taylor, điều đó phần nào đó giải thích vai trò của những tập đa cực trong lý thuyết đa thế vị.

Bổ đề 2.1.3. *Cho $\{u_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm đa điều hòa dưới trên D. Giả sử dãy trên bị chặn đều trên các tập compact của D. Đặt*

$$u(z) := \limsup_{m\to\infty} u_m(z), z \in D.$$

Khi đó, $\{z \in D : u(z) < u^*(z)\}$ là tập đa cực.

2.2 Hội tụ nhanh của các hàm chỉnh hình và các hàm hữu tỉ

Chúng ta bắt đầu với kết quả sau đây với chú ý rằng dãy hàm chỉnh hình $\{f_m\}_{m\geq 1}$ không được giả thiết là bị chặn đều địa phương.

Định lý 2.2.1. *Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm chỉnh hình bị chặn trên D. Giả sử tồn tại dãy tăng $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$ các số dương thỏa mãn các điều kiện sau:*
(i) $\|f_{m+1} - f_m\|_D \leq e^{\alpha_m}$;
(ii) $\alpha := \inf\limits_{m\geq 1}(\alpha_{m+1} - \alpha_m) > 0$;
(iii) Tồn tại tập con Borel không đa cực X của D và hàm đo được bị chặn $f : X \to \mathbb{C}$ sao cho

$$|f_m(x) - f(x)|^{1/\alpha_m} \to 0, \forall x \in X. \tag{2.2}$$

Khi đó, ta có các khẳng định sau:
(a) $\{f_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ đều trên các tập compact của D tới một hàm chỉnh hình f.
(b) Với mỗi tập con compact K của D, ta có $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m - f\|_K^{1/\alpha_m} = 0$.

Chứng minh. Với $m \geq 1$ ta đặt hàm

$$u_m(z) := \frac{1}{\alpha_m}\log|f_{m+1}(z) - f_m(z)|,\ \forall z \in D.$$

Từ giả thiết (i) chỉ ra rằng $\{u_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm điều hòa dưới trên D và nó bị chặn đều trên D. Ta cần phải có

$$\lim_{m\to\infty} u_m(x) = -\infty,\ \forall x \in X.$$

Đầu tiên, cố định $x \in X$ và $\varepsilon \in (0,1)$. Bởi (2.2), tồn tại $m_0 \geq 1$ sao cho

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon^{\alpha_m}, \quad m \geq m_0.$$

Tiếp theo ta có

$$u_m(x) \leq \frac{1}{\alpha_m} \log(\varepsilon^{\alpha_m} + \varepsilon^{\alpha_{m+1}}) < \frac{\log 2}{m} + \log \varepsilon, \ \forall m \geq m_0.$$

Bằng cách cho $\varepsilon \downarrow 0$ ta được kết quả trên. Tiếp theo chúng ta đặt

$$u := (\limsup_{m \to \infty} u_m)^*.$$

Khi đó, $u \in PSH(D)$. Hơn nữa, theo Bổ đề 2.1.3 ta có $u = -\infty$ trên một tập không đa cực X. Vì vậy, $u \equiv -\infty$ trên D. Đặc biệt, u_m hội tụ điểm tới $-\infty$ trên D. Theo bổ đề Hartogs, u_m tiến đều tới $-\infty$ trên các tập compact của D. Từ đó suy ra, nếu K là một tập con compact của D thì với mỗi hằng số $A > 0$, tồn tại $m(A) \geq 1$ sao cho

$$\|f_{m+1} - f_m\|_K < e^{-A\alpha_m}, \forall m \geq m(A).$$

Sử dụng (ii) và bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\|f_{m+n} - f_m\|_K < \sum_{0 \leq k \leq n-1} e^{-A\alpha_{m+k}} < e^{-A\alpha_m}(\sum_{k \geq 0} e^{-Ak\alpha}) = \frac{e^{-A\alpha_m}}{1 - e^{-A\alpha}}.$$

Bởi vậy, áp dụng tiêu chuẩn Cauchy ta được $\{f_m\}_{m \geq 1}$ hội tụ đều trên các tập compact của D tới hàm chỉnh hình f.

Hơn nữa, khi cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức trên và cho A lớn tùy ý ta sẽ có hội tụ nhanh trên K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.2.2. *Cho* $\{p_m\}_{m\geq 1}$ *là một dãy các đa thức trong* $\mathbb{C}^n$ *với* $degp_m \leq m$*. Giả sử tồn tại tập con Borel không đa cực* X *của* $\mathbb{C}^n$ *và một hàm đo được* $f : X \to \mathbb{C}$ *sao cho*

$$|p_m(x) - f(x)|^{1/m} \to 0, \ \forall x \in X. \tag{2.3}$$

Khi đó ta có các khẳng định sau:

(a) $\{p_m\}_{m\geq 1}$ *hội tụ đều trên các tập compact của* $\mathbb{C}^n$ *tới một hàm chỉnh hình* f*.*

(b) Với mỗi tập con compact K *của* $\mathbb{C}^n$ *ta có* $\lim\limits_{m\to\infty} \|p_m - f\|_K^{1/m} = 0$*.*

Chứng minh. Giả sử D là một miền compact tương đối trong $\mathbb{C}^n$. Theo Định lý 2.2.1, khi đó trên miền D, có một dãy $\{p_m\}_{m\geq 1}$ thỏa mãn điều kiện của của Định lý. 2.2.1 Bởi vậy, ta có

$$X_N = \{z \in X : |p_m(z) - f(z)|^{1/m} \leq N, \forall m \geq 1\}, \ N \geq 1.$$

Bởi (2.3), ta có $\cup_{N\geq 1} X_N = X$. Bởi vì X là không đa cực, ta suy ra tồn tại N_0 sao cho X_{N_0} là không đa cực. Vì X_{N_0} là tập Borel, nên nó phải chứa một tập con compact không đa cực X'. Vì f là hàm bị chặn trên X, ta được

$$\sup_{m\geq 1} \frac{1}{m} \log \|p_m\|_{X'} < \infty.$$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Bernstein-Markov ta được

$$\sup_{m\geq 1} \frac{1}{m} \log \|p_m\|_D < \infty.$$

Ta dễ thấy

$$\|p_{m+1} - p_m\|_D \leq e^{Cm}, \ \forall m \geq 1,$$

với $C > 0$ là hằng số không phụ thuộc vào m. Do đó dãy $\alpha_m := Cm$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.2.1. Vậy, ta có điều cần chứng minh. □

Vấn đề trở nên phức tạp hơn đối với dãy các hàm hữu tỉ bởi khi đó sẽ xuất hiện các tập cực của những hàm này. Để xử lý các tập cực này ta cần khái niệm sau đây.

Định nghĩa 2.2.3. *Cho V là một siêu mặt đại số trong $\mathbb{C}^n$ và U là một tập mở của $\mathbb{C}^n$. Ta gọi bậc của $V \cap U$, kí hiệu $deg(V \cap U)$ là số nguyên nhỏ nhất d sao cho tồn tại một đa thức p có bậc là d trong $\mathbb{C}^n$ thỏa mãn $V \cap U = \{z \in U : p(z) = 0\}$.*

Sử dụng khái niệm trên chúng ta phát biểu kết quả chính đầu tiên của chương này như sau:

Định lý 2.2.4. *Cho $\{r_m\}_{m \geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỉ trên $\mathbb{C}^n$ thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) Tồn tại một tập con Borel không đa cực X của $\mathbb{C}^n$ và một hàm đo được bị chặn $f : X \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\lim_{m\to\infty} |r_m(x) - f(x)|^{1/m} = 0,\ \forall x \in X;$$

(ii) Với mỗi $z_0 \in \mathbb{C}^n$, tồn tại hình cầu mở $\mathbb{B}(z_0, r), m_0 \geq 1$ và $\lambda \in (0, 1)$ sao cho

$$deg(V_m \cap \mathbb{B}(z_0, r)) \leq m^\lambda,\ \forall m \geq m_0,$$

ở đó V_m là các tập cực của r_m.

Khi đó, tồn tại một hàm đo được $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sao cho $|r_m - F|^{1/m}$ hội tụ điểm tới 0 ở ngoài một tập có độ đo Lebesgue bằng 0.

Để chứng minh định lý trên trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 2.2.5. *Cho* $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$ *là một dãy số dương sao cho* $\alpha_m \leq m^\lambda$ *với hằng số* $\lambda \in (0,1)$*. Khi đó, hàm*

$$F(t) = \sum_{m\geq 1} t^{\frac{m}{\alpha_m}} \tag{2.4}$$

xác định và liên tục trên $[0,1)$*.*

Chứng minh. Theo giả thiết ta có

$$t^{\frac{m}{\alpha_m}} \leq t^{m^{1-\lambda}}, \quad \forall t \in [0,1), m \geq 1.$$

Sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{m\geq 1} \delta^{m^{1-\lambda}} < \infty,\ \forall \delta \in (0,1).$$

Cố định $\delta \in (0,1)$ và đặt $u_m = \delta^{m^{1-\lambda}}$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\frac{u_m}{u_{m+1}} &= \left(\frac{1}{\delta}\right)^{(m+1)^{1-\lambda}-m^{1-\lambda}} \\
&= \left(\frac{1}{\delta}\right)^{m^{1-\lambda}((1+\frac{1}{m})^{1-\lambda}-1)} \\
&= \left(\frac{1}{\delta}\right)^{m^{1-\lambda}(1+\frac{1-\lambda}{m}+O(\frac{1}{m^2})-1)} \\
&= e^{Cm^{-\lambda}+O(m^{-1-\lambda})}, \quad (C := \log(\frac{1}{\delta})) \\
&\geq 1 + Cm^{-\lambda} + O(m^{-1-\lambda}), \quad (\text{ từ } e^t \geq 1+t,\ \forall t > 0).
\end{aligned}$$

Ta có

$$m(\frac{u_m}{u_{m+1}} - 1) \geq Cm^{1-\lambda} + O(m^{-\lambda}) \to \infty, \quad m \to \infty.$$

Sử dụng tiêu chuẩn Raabe, ta suy ra chuỗi số $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ hội tụ và ta được điều phải chứng minh. □

Chứng minh. (Định lý 2.2.4) Lấy $z_0 \in \mathbb{C}^n$ và hình cầu $U := \mathbb{B}(z_0, r)$ tâm z_0 sao cho thỏa mãn các điều kiện của (ii) được thỏa mãn, khi đó ta chỉ cần chứng minh với mọi ε, tồn tại tập $A_\varepsilon \subset U$ có độ đo nhỏ hơn ε và một hàm đo được F_ε trên $U_\varepsilon := U \setminus A_\varepsilon$ sao cho $|r_m - F_\varepsilon|^{1/m}$ hội tụ đều tới 0 trên U_ε. Để làm được điều này trước hết theo (ii), tồn tại hằng số $\lambda \in (0,1)$ và các đa thức q'_m, q''_m thỏa mãn các tính chất:

(i) $r_m = p_m/q_m$, ở đó $q_m = q'_m q''_m$;

(ii) $\alpha_m := \deg q'_m \leq m^\lambda$ với mỗi $m \geq m_0$ và q''_m là khác 0 trên U.

Sau khi thu nhỏ U, lấy chuẩn hóa và nhân với các hằng số thích hợp ta có thể giả sử q''_m khác 0 trên lân cận V cố định $\overline{U}$ với

$$\|q'_m\|_U = \|q''_m\|_U = 1. \tag{2.5}$$

Ta có $\|q_m\|_U \leq 1$. Áp dụng bất đẳng thức Bernstein-Markov ta được

$$\sup_{m\geq 1} \frac{1}{m} \log \|q_m\|_K < \infty \tag{2.6}$$

với mỗi tập con compact K của $\mathbb{C}^n$. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tập con compact không đa cực X' của X sao cho

$$\sup_{m\geq 1} \frac{1}{m} \log \|p_m\|_{X'} < \infty.$$

Để giải quyết vấn đề này ta đặt tập

$$X_N := \{z \in X : |r_m(z) - f(z)|^{1/m} \leq N, \forall m \geq 1\}, N \geq 1.$$

Theo giả thiết (i), ta có $\cup_{N\geq 1} X_N = X$. Bởi vì X là không đa cực suy ra phải tồn tại N_0 sao cho X_{N_0} là không đa cực. Vì X_{N_0} là tập Borel, nên nó chứa một tập con compact không đa cực X'. Từ hàm f bị chặn trên X, ta được

$$\sup_{m\geq 1} \|r_m\|_{X'}^{1/m} < \infty.$$

Tiếp theo, bằng cách áp dụng bất đẳng thức (2.6) ở trên và lại sử dụng bất đẳng thức Bernstein-Markov, ta suy ra

$$\sup_{m\geq 1} \frac{1}{m} \log \|p_m\|_K < \infty. \tag{2.7}$$

Với mỗi tập con compact K của $\mathbb{C}^n$ và $m \geq 1$ ta đặt

$$u_m := \frac{1}{m} \log |p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1}|.$$

Tiếp tục áp dụng (2.6), (2.7) và các đánh giá đơn giản ta thấy dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\{u_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ đều tới $-\infty$ trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Dễ thấy

$$u_m = \frac{1}{m} \log |q_{m+1}q_m| + \frac{1}{m} \log |r_{m+1} - r_m|.$$

Bởi (i) và (2.6), ta có

$$\lim_{m\to\infty} u_m(x) = -\infty, \ \forall x \in X.$$

Vì X là không đa cực, bằng cách sử dụng các lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.2.1, ta suy ra $\{u_m\}_{m\geq 1}$ phải hội tụ đều tới $-\infty$ trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Đặc biệt khi cho $M > 0$, tồn tại $m(M)$ sao cho

$$\sup_U u_m < -M, \ \forall m \geq m(M).$$

Do đó, ta có đánh giá sau đây trên U

$$|r_{m+1} - r_m| < \frac{e^{-Mm}}{|q_{m+1}q_m|}, \ \forall m \geq m(M). \tag{2.8}$$

Tiếp theo, với $m \geq m_0$, bằng cách sử dụng các lập luận trong [6] để đánh giá độ lớn của các tập con của U mà ở đó $q'_{m+1}q'_m$ đủ nhỏ. Chính xác hơn, cho $\delta \in (0,1)$ ta đặt

$$X_{m,\delta} := \{z \in U : |q'_{m+1}(z)q'_m(z)| < \delta^m\},$$

$$X'_{m,\delta} := \{z \in U : |q'_m(z)| < \delta^{m/2}\},$$

$$X''_{m,\delta} := \{z \in U : |q'_{m+1}(z)| < \delta^{m/2}\}.$$

Rõ ràng $X_{m,\delta} \subset X'_{m,\delta} \cup X''_{m,\delta}$, dễ thấy

$$\lambda_{2n}(X_{m,\delta}) \leq \lambda_{2n}(X'_{m,\delta}) + \lambda_{2n}(X''_{m,\delta}),$$

ở đây và trong cả luận án này, ta luôn ký hiệu λ_{2n} là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{C}^n$. Theo Hệ quả 4.2 trong [3], ta có đánh giá sau:

$$\lambda_{2n}(X'_{m,\delta}) \leq C_{n,r_0}\delta^{\frac{m}{\alpha_m}}, \lambda_{2n}(X''_{m,\delta}) \leq C_{n,r_0}\delta^{\frac{m}{\alpha_{m+1}}},$$

ở đây C_{n,r_0} là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào n, r_0. Bởi vậy, với mỗi $m \geq 1$, ta có

$$\lambda_{2n}(X_{m,\delta}) \leq C_{n,r_0}(\delta^{\frac{m}{\alpha_m}} + \delta^{\frac{m}{\alpha_{m+1}}}),$$

nên

$$\lambda_{2n}(A_{\varepsilon,r_0}) \leq C_{n,r_0}\sum_{m\geq 1}(\delta^{\frac{m}{\alpha_m}} + \delta^{\frac{m}{\alpha_{m+1}}}),$$

ở đây $A_\varepsilon := \cup_{m\geq 1}X_{m,\delta}$. Bởi giả thiết (ii) và Bổ đề 2.2.5, ta có thể chọn được $\delta \in (0,1)$ đủ nhỏ sao cho vế phải của bất đẳng thức trên nhỏ hơn ε.

Mặt khác, từ q''_m khác 0 trên V nếu $m \geq m_0$, nên hàm $u_m := \frac{1}{m}\log|q''_m|$ là đa điều hòa trên V với mỗi $m \geq m_0$. Bởi điều kiện chuẩn hóa (2.5) và bất đẳng thức Bernstein-Markov, ta suy ra $\sup_U u_m = 0$ với mỗi $m \geq 1$

và dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ bị chặn trên đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Đặc biệt, dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ không hội tụ tới $-\infty$ đều trên các tập compact của V. Điều đó cũng chỉ ra rằng dãy đó bị chặn đều dưới trên U. Do đó ta có hằng số $C' > 0$ sao cho

$$\inf_U \frac{1}{m} \log |q''_m q''_{m+1}| > -C', \forall m \geq m_0. \tag{2.9}$$

Ở đây với $z \in U_\varepsilon := U \setminus A_\varepsilon$, từ (2.8) và (2.9) ta suy ra

$$|r_{m+1}(z) - r_m(z)| < \left(\frac{e^{C'-M}}{\delta}\right)^m, \ \forall m \geq m(M).$$

Do vậy, cho M đủ lớn sao cho $e^{C'-M} < \delta$, theo bất đẳng thức tam giác ta suy ra $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là dãy Cauchy trên U_ε, vì vậy r_m hội tụ đều trên U_ε tới hàm đo được F_ε sao cho

$$\lim_{m\to\infty} \|r_m - F_\varepsilon\|_{U_\varepsilon}^{1/m} = 0.$$

Định lý được chứng minh.

Ta có các nhận xét sau: □

Nhận xét. (i) Ta không biết định lý trên có còn đúng không khi thiếu giả thiết (ii). Mặt khác, theo dõi chứng minh trên ta thấy rằng kết quả của định lý vẫn còn đúng khi điều kiện (ii) bị bỏ qua trong khi (i) được thay bởi

$$\lim_{m\to\infty} |r_m(x) - f(x)|^{1/m^\gamma} = 0, \ \forall x \in X,$$

với $\gamma > 1$ là hằng số.

(ii) Qua phép chứng minh của định lý cũng chỉ ra rằng bất kì tập mở $D \subset \mathbb{C}^n$ trên đó r_m là chỉnh hình với mỗi m, là hội tụ đều nhanh trên các tập compact, nghĩa là với mỗi tập con compact K của D ta có

$$\lim_{m\to\infty} \|r_m - F\|_K^{1/m} = 0.$$

Đặc biệt, F là hàm chỉnh hình trên D.

(iii) Bằng cách xét hàm $r'_m := 1/r_m$, thay cho r_m ta có thể thấy định lý vẫn đúng nếu V_m trong giả thiết (ii) được thay bằng không điểm của r_m.

Kết quả cuối trong hướng nghiên cứu này là một dạng mở rộng định lý của Bloom (Định lý 1.1.2) khi sự hội tụ chỉ được xét trên biên của miền bị chặn.

Định lý 2.2.6. *Cho D là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $X \subset \partial D$ là một tập con compact. Giả sử f là một hàm chỉnh hình bị chặn trên D và $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỉ trên $\mathbb{C}^n$. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $x \in X$, điểm $rx \in D$ với $r < 1$ đủ gần 1. Hơn nữa, nếu $u \in PSH(D), u < 0$ và thỏa mãn

$$\lim_{r\to 1^-} u(rx) = -\infty,\ \forall x \in X$$

thì $u \equiv -\infty$.

(ii) Với mọi $x \in X$, tồn tại giới hạn

$$f^*(x) := \lim_{r\to 1^-} f(rx).$$

(iii) Dãy $|r_m - f^*|^{1/m}$ hội tụ điểm tới 0 trên X.

Khi đó ta có các khẳng định sau:

(a) Dãy $|r_m - f|^{1/m}$ hội tụ theo dung lượng tới 0 trên D.

(b) Tồn tại tập con đa cực E của $\mathbb{C}^n$ có tính chất sau: Với mỗi $z_0 \in D \setminus E$ và mọi không gian con affine phức L của $\mathbb{C}^n$ đi qua z_0, tồn tại một dãy con

$\{r_{m_j}\}_{j\geq 1}$ *sao cho* $|r_{m_j} - f|_{D_{z_0}}^{1/m_j}$ *hội tụ tới* 0 *theo dung lượng (liên quan đến* L*). Ở đó* D_{z_0} *là thành phần liên thông của* $D \cap L$ *chứa* z_0.

Nhận xét. (i) Điều kiện đầu tiên đặt trên X là có tính chất địa phương. Hơn nữa nếu ∂D là $\mathcal{C}^1$-trơn tại các điểm của X thì điều kiện này được thỏa mãn.

(ii) Nếu X là tập con compact của đường tròn với độ đo Lebesgue dương thì X thỏa mãn giả thiết (i). Điều này được chứng minh như sau: Giả sử $u \in SH(\Delta), u < 0$, ở đó Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$ sao cho

$$\lim_{r\to 1^-} u(rx) = -\infty,\ \forall x \in X.$$

Ta phải chứng minh $u \equiv -\infty$. Xét điểm $\xi \in \Delta$, bằng cách hợp với một tự đồng cấu của Δ ta có thể giả sử $\xi = 0$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức giá trị trung bình và bổ đề Fatou ta được

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi}\limsup_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\limsup_{r\to 1^-} u(re^{i\theta})d\theta = -\infty.$$

(iii) Phần (b) của Định lý 2.2.6 đã không được nghiên cứu bởi Bloom và Gonchar ngay trong trường hợp X là tập con không đa cực của D. Kết quả của chúng tôi được lấy cảm hứng từ một định lý của Sadullaev trong [19] nói rằng một hàm chỉnh hình có thể được xấp xỉ nhanh nếu và chỉ nếu hạn chế của nó trên mỗi đường thẳng phức có thể xấp xỉ nhanh.

(iv) Khó khăn chủ yếu trong chứng minh là ở chỗ không gian con L có thể có giao bằng rỗng với tập không đa cực X, nên ta không thể áp dụng trực tiếp (a).

Để chứng minh định lý trước hết ta đưa ra khái niệm và các kí hiệu sau:

Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và E là tập con của ∂D. Khi đó ta định nghĩa hàm cực trị tương đối như sau:

$$\omega_R(z, E, D) := \sup\{\varphi(z) : \varphi \in PSH(D), \varphi < 0,$$
$$\limsup_{r\to 1^-, rx\in D} \varphi(rx) \leq -1 \,\forall x \in E\},\ z \in D.$$

Bổ đề sau sử dụng tính chất (i) của tập X được cho trong Định lý 2.2.6.

Bổ đề 2.2.7. *Cho D là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và X là tập con của ∂D. Giả sử X thỏa mãn điều kiện (i) của Định lý 2.2.6. Khi đó với mỗi dãy $\{X_j\}_{j\geq 1} \subset \partial D$ sao cho $X_j \uparrow X$ ta có*

$$\lim_{j\to\infty} \omega_R(z, X_j, D) < 0,\ \forall z \in D.$$

Chứng minh. Giả sử khẳng định trên là sai. Từ $\{\omega_R(z, X_j, D)\}_{j\geq 1}$ là dãy tăng các hàm không dương, tồn tại $z_0 \in D$ sao cho

$$\omega_R(z_0, X_j, D) = 0,\ \forall j \geq 1.$$

Cho $j \geq 1$, với mỗi $k \geq 1$, ta có thể tìm được $\varphi_{k,j} \in PSH(D), \varphi_{k,j} < 0$, sao cho

$$\lim_{r\to 1^-} \varphi_{k,j}(rx) \leq -1, \forall x \in X_j \text{ nhưng } \ \varphi_{k,j}(z_0) > -\frac{1}{2^k}.$$

Bây giờ ta đặt $\varphi_j := \sum_{k\geq 1} \varphi_{k,j}$. Dễ dàng kiểm tra được:

(i)$\varphi_j \in PSH(D), \varphi_j < 0$;

(ii) $\lim\limits_{r\to 1^-} \varphi_j(rx) = -\infty, \forall x \in X_j$ nhưng $\ \varphi_j(z_0) > -1$.

Tiếp theo, ta đặt

$$\varphi(z) := \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^j}\varphi_j(z),\ \forall z \in D.$$

Dễ thấy $\varphi \in PSH(D), \varphi < 0, \varphi(z_0) > -1$. Bây giờ, cho $x \in X$ ta chọn được j_x sao cho $x \in X_{j_x}$. Khi đó ta có

$$\lim_{r \to 1^-} \varphi(rx) \le \frac{1}{2^{j_x}} \lim_{r \to 1^-} \varphi_{j_x}(rx) = -\infty.$$

Điều này là mâu thuẫn và bổ đề được chứng minh.

□

Chúng ta cũng cần một số kết quả về tính compact trong tập các hàm đa điều hòa dưới.

Bổ đề 2.2.8. *Cho $\{u_m\}_{m\ge 1}$ là một dãy các hàm đa điều hòa dưới được xác định trên miền D trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử dãy trên bị chặn đều trên các tập con compact của D và không hội tụ đều tới $-\infty$ trên một tập con compact của D. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(a) Tồn tại một dãy con $\{u_{m_j}\}_{j\ge 1}$ hội tụ trong $L^1_{loc}(D)$ tới một hàm $u \in PSH(D), u \not\equiv -\infty$.

(b) $\limsup\limits_{j\to\infty} u_{m_j} \le u$ trên D.

(c) $\limsup\limits_{j\to\infty} u_{m_j} = u$ ngoài một tập con đa cực của D.

(d) Tập $\{z \in D : \lim\limits_{j\to\infty} u_{m_j}(z) = -\infty\}$ là đa cực.

Chứng minh. Các khẳng định (a) và (b) được suy ra từ Định lý 3.2.12 trong [12]. Tiếp tục áp dụng Định lý 3.2.12 trong [12] ta suy ra $u = (\limsup\limits_{j\to\infty} u_{m_j})^*$ khắp nơi trên D. Vì vậy, theo Bổ đề 2.1.3 ta có kết quả (c). Cuối cùng, (d) dễ dàng được suy ra từ (c), Vậy bổ đề được chứng minh. □

Kết quả chuẩn bị cuối cùng cho một điều kiện đủ để một dãy các hàm đo được hội tụ theo dung lượng tới 0.

Bổ đề 2.2.9. *Cho* $\{u_m\}_{m\geq 1}$ *là một dãy các hàm đa điều hòa dưới và* $\{v_m\}_{m\geq 1}$ *là một dãy các hàm đo được xác định trên miền* $D \subset \mathbb{C}^n$*. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(a) $\{u_m\}_{m\geq 1}$ *là bị chặn trên đều địa phương;*

(b) Tồn tại tập con compact không đa cực X *của* D *sao cho*

$$\inf_{m\geq 1} \sup_{z\in X} u_m(z) > -\infty;$$

(c) $u_m + v_m$ *hội tụ tới* $-\infty$ *đều trên các tập con compact của* D*.*

Khi đó dãy $\{e^{v_m}\}_{m\geq 1}$ *hội tụ theo dung lượng tới* 0*.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại một tập con compact K của D, dãy con $\{m_j\}$ và các hằng số $0 < \varepsilon < 1, \delta > 0$, sao cho

$$\text{cap }(K_j, D) > \delta, \forall j \geq 1,$$

ở đó $K_j := \{z \in K : v_{m_j} < \log \varepsilon\}$. Từ (b) ta có u_{m_j} không tiến tới $-\infty$ đều trên X. Bởi Bổ đề 2.2.7 và giả thiết (a), ta có thể giả sử dãy con u_{m_j} hội tụ trong $L^1_{loc}(D)$ tới $u \in PSH(D), u \not\equiv -\infty$. Tiếp theo, từ giả thiết (c) suy ra với mỗi M sao cho $M + \log \varepsilon > 0$, tồn tại $j_M \geq 1$ sao cho

$$u_{m_j} + v_{m_j} < -M \ \forall j \geq j_M \ \forall z \in K.$$

Bởi vậy khi cho $j \geq j_M$ ta có bao hàm thức sau

$$K_j \subset L_j := \{z \in K : u_{m_j} < -M - \log \varepsilon\}.$$

Dễ thấy

$$\text{cap }(L_j, D) \geq \text{cap }(K_j, D) > \delta, \ \forall j \geq j_M.$$

Chọn một lân cận ω của K và nó là tập compact tương đối trong D sao cho

$$\sup_{j\geq 1} \|u_{m_j}\|_{L^1(\omega)} < \infty. \tag{2.10}$$

Theo Định nghĩa 2.1.1, ta có thể chọn $\varphi_j \in PSH(D), -1 < \varphi_j < 0$, sao cho

$$\int_{L_j} (dd^c\varphi_j)^n > \delta.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chern-Levine-Nirenberg (xem Định lý 2.1.7 trong [4]), với $j \geq j_M$ ta có đánh giá sau

$$\delta < \int_{L_j} (dd^c\varphi_j)^n \leq \frac{1}{M+\log\varepsilon}\int_K |u_{m_j}|(dd^c\varphi_j)^n \leq \frac{C_{K,\omega}}{M+\log\varepsilon}\|u_{m_j}\|_{L^1(\omega)}.$$

Ở đây $C_{K,\omega}$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào K,ω. Cho $M\to\infty$ và áp dụng (2.10) ta có sự mâu thuẫn. Vậy bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh. (Định lý 2.2.6) (a) Sau khi bỏ đi từ X một tập con đa cực (có thể bằng tập rỗng), ta có thể giả sử rằng $r_m(z) \in \mathbb{C}$ với mỗi $z \in X$ và $m \geq 1$. Do f^* là hàm bị chặn trên X, từ giả thiết (ii) và (iii) ta suy ra

$$\sup_{m\geq 1} \frac{1}{m}\log|r_m(x)| < \infty \ \forall x \in X.$$

Với $N \geq 1$ ta đặt

$$X_N := \{z \in X : \sup_{m\geq 1}\frac{1}{m}\log|r_m(z)| \leq N\}.$$

Tiếp theo ta đặt $X = \cup_{N\geq 1} X_N$. Từ X là tập không đa cực, ta suy ra tồn tại $N_0 \geq 1$ sao cho $X' := X_{N_0}$ là tập không đa cực. Bây giờ ta viết $r_m = p_m/q_m$

với q_m thỏa mãn $\|q_m\|_{X'} = 1$. Với $m \geq 1$, ta xét hàm đa điều hòa dưới sau đây trên D

$$u_m := \frac{1}{m} \log |p_m - q_m f|, v_m := \frac{1}{m} \log |q_m|.$$

Ta cần chứng minh dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ tới $-\infty$ đều trên các tập compact của D. Để đạt được điều đó, ta chú ý rằng, do X' là không đa cực, áp dụng bất đẳng thức Bernstein-Walsh (2.1) suy ra dãy $\{v_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Bằng cách chọn của X', và áp dụng bất đẳng thức Bernstein-Walsh (2.1), ta suy ra dãy $\frac{1}{m} \log |p_m|$ bị chặn đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Tiếp theo, từ giả thiết về tính bị chặn của hàm f, ta suy ra dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ bị chặn đều trên các tập compact của D. Cho $k, j \geq 1$ ta đặt

$$X_{k,j} := \{x \in X : |r_m(x) - f^*(x)|^{1/m} < 1/j, \forall m \geq k\}.$$

Theo giả thiết ta có $X_{k,j} \uparrow X$ khi $j \to \infty$. Cố định điểm $z_0 \in D$. Theo Bổ đề 2.2.7 và giả thiết (i), ta có thể tìm được $k_j(z_0)$ (phụ thuộc vào j và z_0) sao cho

$$\omega_R(z_0, X_{k,j}, D) < 0, \forall k \geq k_j(z_0). \tag{2.11}$$

Mặt khác, với $x \in X_{k,j}$ và $m \geq k$ ta có

$$\limsup_{r\to 1^-} u_m(rx) = v_m(x) + \frac{1}{m} \log |r_m(x) - f^*(x)| \leq A_1 - \log j.$$

Ở đây $A_1 := \sup\limits_{m\geq 1} \sup\limits_{x\in D} v_m(x)$ là hằng số hữu hạn. Bây giờ ta đặt

$$A_2 := \sup_{m\geq 1} \sup_{x\in D} u_m(x).$$

Khi đó A_2 cũng là hằng số hữu hạn. Kết hợp tất cả các điều trên và sử dụng định nghĩa của $\omega_R(\cdot, E, X)$, ta đi đến kết quả sau

$$u_m(z_0) \leq A_2 + (A_1 - \log j)\omega_R(z_0, X_{k,j}, D), \ \forall m \geq k. \tag{2.12}$$

Bằng cách kết hợp (2.11), (2.12) và cho $m \to \infty$, $j \to \infty$ ta được

$$\lim_{m\to\infty} u_m(z_0) = -\infty.$$

Do kết quả trên đúng với $z_0 \in D$ và do $\{u_m\}_{m\geq 1}$ bị chặn đều trên D, bởi bổ đề Hartogs ta suy ra u_m phải hội tụ đều tới $-\infty$ trên các tập compact của D.

Cuối cùng, với z nằm ngoài các tập cực của r_m ta đặt

$$u_m(z) := v_m(z) + \frac{1}{m}\log|r_m(z) - f(z)|.$$

Bằng cách áp dụng Bổ đề 2.2.9 ta được $|r_m - f|^{1/m}$ hội tụ theo dung lượng tới 0 trên D.

(b) Theo chứng minh ở phần (a), dãy $v_m := \frac{1}{m}\log|q_m|$ bị chặn đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Hơn nữa, v_m không hội tụ về $-\infty$ đều trên tập compact của $\mathbb{C}^n$. Theo Bổ đề 2.2.7 (d), tồn tại một tập con đa cực E của $\mathbb{C}^n$ sao cho

$$\limsup_{j\to\infty} v_m > -\infty \text{ trên } D \setminus E.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng E thỏa mãn tính chất nêu trong kết luận của định lý. Cố định $z_0 \in D \setminus E$. Giả sử L là không gian con affine phức đi qua z_0 và giả sử D_{z_0} là thành phần liên thông của $D \cap L$ chứa z_0. Chọn một dãy con $\{v_{m_j}\}_{j\geq 1}$ sao cho

$$\inf_{j\geq 1} v_{m_j}(z_0) > -\infty.$$

Kí hiệu v'_j và v''_j các hạn chế trên D_{z_0} của hai dãy v_{m_j} và $\frac{1}{m_j}\log|r_{m_j} - f|$. Theo kết quả đã được chứng minh trong phần (a), ta có $v'_j + v''_j$ hội tụ đều về $-\infty$ trên các tập compact của D_{z_0}. Tiếp tục sử dụng Bổ đề 2.2.9 ta được $e^{v'_j}$ hội tụ nhanh theo dung lượng về 0 trong D_{z_0}. $\square$

2.3 Một ví dụ về hội tụ nhanh của hàm hữu tỷ

Mục tiêu của phần này là đưa ra ví dụ của dãy các hàm hữu tỉ thỏa mãn giả thiết của Định lý 2.2.6. Chính xác hơn ta sẽ xây dựng một dãy các hàm hữu tỉ $\{r_m\}_{m\geq 1}$ với các cực nằm ngoài $\overline{\Delta}$ sao cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ điểm nhanh về f^* trên tập con compact của ∂D. Ở đó f^* là các giá trị biên của hàm chỉnh hình bị chặn f xác định trên đĩa đơn vị Δ. Ta bắt đầu bằng một kết quả về hội tụ nhanh của một tích vô hạn nào đó.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm hữu tỉ, D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\beta_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các số dương. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(a) $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn địa phương trên D;

(b)

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty}\beta_j\Big)^{\frac{1}{m}} = 0;$$

(c) Tồn tại tập con không đa cực X của D sao cho với mỗi $x \in X$, tồn tại hằng số $M_x > 0$ sao cho

$$\Big|\frac{r_m(x)}{r_{m-1}(x)} - 1\Big| \leq M_x\beta_m,\ \forall m \geq 2.$$

Khi đó dãy $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ đều nhanh trên mọi tập compact của D tới hàm chỉnh hình g trên D.

Chứng minh. Ta chứng minh rằng r_m hội tụ điểm nhanh tới hàm g trên X. Ta đặt $f_j := r_j/r_{j-1}$ với $j \geq 2$. Cố định $x \in X$.

$$|g(x) - r_m(x)| = |r_m(x)|| \prod_{j=m+1}^{\infty} f_j(x) - 1|.$$

Theo (c), khi m đủ lớn ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} \Big| \prod_{j=m+1}^{\infty} f_j(x) - 1\Big| &= \Big| \prod_{j=m+1}^{\infty} \Big(1 + (f_j(x) - 1)\Big) - 1\Big| \leq \prod_{j=m+1}^{\infty} \Big(|f_j(x) - 1| + 1\Big) - 1 \\ &\leq \prod_{j=m+1}^{\infty} \Big(M_x\beta_j + 1\Big) - 1 \leq \exp(\sum_{j=m+1}^{\infty} M_x\beta_j) - 1 \\ &\leq 2M_x \sum_{j=m+1}^{\infty} \beta_j. \end{aligned}$$

Ở đây ta sử dụng bất đẳng thức $e^t \leq 1 + 2t, 0 \leq t \ll 1$ và $\sum_{j=m+1}^{\infty} \beta_j \to 0$ khi $m \to \infty$. Chú ý rằng, từ (a) tồn tại hằng số $C_x > 0$ sao cho $|r_m(x)| \leq C_x$ với $m \geq 1$. Bởi vậy

$$|g(x) - r_m(x)| \leq 2C_xM_x \sum_{j=m+1}^{\infty} \beta_j.$$

Điều cần chứng minh được suy ra từ (b). Cuối cùng áp dụng nhận xét sau Định lý 2.2.4 để hoàn thành việc chứng minh. □

Xét một tập con compact F của đường tròn đơn vị $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ có độ dài dương nhưng không đâu trù mật trong $\partial\Delta$. Khi đó, F thỏa mãn điều kiện (i) của Định lý 2.2.6. Điều này có thể được thực hiện bằng cách xây dựng một tập Cantor $\mathcal{C} \subset (-1, 1)$ với tính chất như trên, khi đó ta có thể chọn $F := \partial\Delta \cap \pi^{-1}(\mathcal{C})$, ở đó π là phép chiếu trực giao từ $\partial\Delta$ đến trục thực.

Mệnh đề 2.3.2. *Tồn tại một tập con đếm được A của $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ với $F \subset \bar{A}$, một dãy $\{r_m\}_{m\geq 1}$ của các hàm hữu tỉ trên $\mathbb{C}$ và một hàm chỉnh hình $f : \mathbb{C} \setminus \overline{A} \to \mathbb{C}$ bị chặn trên Δ thỏa mãn các tính chất sau:*
(a) Các cực của $\{r_m\}_{m\geq 1}$ đều nằm trong A với mỗi $m \geq 1$.
(b) $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ nhanh đều tới f trên các tập compact của $\mathbb{C} \setminus \overline{A}$.
(c) $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ điểm nhanh trên $F := \overline{A} \setminus A$ tới f^*, với f^* là hàm giá trị biên của f.
(d) f bị chặn trên Δ nhưng không mở rộng chỉnh hình qua bất cứ điểm nào của F.

Chứng minh của mệnh đề này cần hai bổ đề bổ trợ. Thứ nhất ta cần giới thiệu một số kí hiệu. Ta kí hiệu $(\mathbb{N}^*)^2 = \{(m, n) : m, n \geq 1\}$ được gọi là sắp thứ tự, nghĩa là $(m, n) \prec (p, q)$ nếu và chỉ nếu $m + n < p + q$, hoặc $m + n = p + q$ nhưng $m < p$. Giả sử $ind(m, n)$ là chỉ số của (m, n) theo một dãy thứ tự. Bằng cách tính toán ta có:

$$ind(m, n) = \frac{(m + n - 2)(m + n - 1)}{2} + m.$$

Từ đó, $\max(m, n) \geq \sqrt{\frac{ind(m,n)}{2}}$ với mọi $m, n \geq 1$.

Bổ đề 2.3.3. *Tồn tại một dãy song chỉ số $\{r_{mn}\} \subset (0, 1)$ sao cho dãy sắp thứ tự tương ứng $\{s_j\}_{j\geq 1}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=n}^{\infty}(1 - s_j)\Big)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Chứng minh. Cố định số thực $a > 1$. Ta sẽ chứng minh dãy xác định bởi $r_{jk} = 1 - a^{-j^4-k^4}$ thỏa mãn điều kiện trên. Thật vậy, ta biết rằng $r_{jk} = s_{ind(j,k)}$ và $\max(j,k) \geq \sqrt{\frac{ind(j,k)}{2}}$ thì ta có

$$\sum_{j=n}^{\infty}(1-s_j) = \sum_{ind(j,k)\geq n}(1-r_{jk}) \leq \sum_{j\geq\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor}(1-r_{jk}) + \sum_{k\geq\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor}(1-r_{jk}).$$

Tiếp theo, ta đánh giá mỗi phần trong biểu diễn trên. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor}(1-r_{jk}) &= \sum_{j\geq\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor} a^{-j^4-k^4} = (\sum_{j\geq\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor} a^{-j^4})(\sum_{k\geq 1} a^{-k^4}) \\ &\leq a^{-(\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor)^4}(\sum_{j=0}^{\infty} a^{-j})^2 = \frac{a^2}{(a-1)^2}a^{-(\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor)^4}.\end{aligned}$$

Vì thế,

$$\sum_{j=n}^{\infty}(1-s_j) \leq \frac{2a^2}{(a-1)^2}a^{-(\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\rfloor)^4}.$$

Bởi đánh giá cuối cùng ta suy ra giới hạn trên. □

Bổ đề 2.3.4. *Cho* $a = e^{i\theta}$ *và* $b = re^{i\xi}$ *với* $0 \leq \theta, \xi \leq \frac{\pi}{2}$. *Khi đó*

$$|1-\bar{b}a| \geq \frac{2}{\pi}|\theta-\xi|.$$

Chứng minh. Ta viết

$$\begin{aligned}|1-\bar{b}a| &= |1-re^{i(\theta-\xi)}| = \sqrt{(1-r\cos(\theta-\xi))^2+(r\sin(\theta-\xi))^2} \\ &= \sqrt{1+r^2-2r\cos(\theta-\xi)} \geq |\sin(\theta-\xi)| \geq \frac{2}{\pi}|\theta-\xi|,\end{aligned}$$

ở đây trong đánh giá cuối cùng ta sử dụng bất đẳng thức $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ với mọi $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. □

Bổ đề 2.3.5. *Tồn tại một dãy* $B = \{\alpha_j\}_{j\geq 1} \subset \Delta$ *sao cho*

(a) F *là tập các điểm tụ của* B*;*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum_{j=n+1}^{\infty}(1-|\alpha_j|)\big)^{\frac{1}{n}} = 0$*;*

(c) Với mọi $\xi \in F, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-|\alpha_j|}{|1-\bar{\alpha}_j\xi|} < \infty$*. Hơn nữa,*

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1-|\alpha_j|}{|1-\bar{\alpha}_j\xi|}\Big)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Chứng minh. Ta sử dụng lập luận của Colwell trong [7]. Tập $\partial\Delta \setminus F$ là hợp đếm được của các cung mở phân biệt. Giả sử A là tập các điểm cuối của các cung này.

Ta viết

$$A = \{a_m, b_m : m \geq 1\}, \quad |a_m| = |b_m| = 1, \quad \varphi_m = \arg a_m < \arg b_m = \psi_m.$$

Cho $m, n \geq 1$, ta xét hai dãy song chỉ số sau:

$$\xi_{mn} = \varphi_m + \frac{1}{2}\Big(\frac{\psi_m - \varphi_m}{2\pi}\Big)^n, \quad \eta_{mn} = \psi_m - \frac{1}{2}\Big(\frac{\psi_m - \varphi_m}{2\pi}\Big)^n.$$

Chú ý rằng, với m cố định, $\xi_{mn} \downarrow \varphi_m$ và $\eta_{mn} \uparrow \psi_m$.

Đặt $t_{mn} := 1 - (1 - r_{mn})\big(\frac{\psi_m - \varphi_m}{2\pi}\big)^n < 1 - r_{mn}$, ở đó r_{mn} được xác định như trong Bổ đề 2.3.3. Ta đặt

$$c_{mn} = t_{mn}e^{i\xi_{mn}}, \quad d_{mn} = t_{mn}e^{i\psi_{mn}}.$$

Ta sắp xếp $\{c_{mn}\}$ và $\{d_{mn}\}$ theo lối từ điển để có được hai dãy mới $\{\tilde{c}_n\}_{n\geq 1}$ và $\{\tilde{d}_n\}_{n\geq 1}$ tương ứng. Giả sử $B := \{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ là dãy sau:

$$\tilde{c}_1, \tilde{d}_1, \tilde{c}_2, \tilde{d}_2, \ldots, \tilde{c}_n, \tilde{d}_n, \ldots.$$

Dễ dàng thấy rằng F là tập các điểm tụ của B và $\overline{B} \subset \{z : |z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}$. Theo Bổ đề 2.3.3 ta cũng có

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|) \Big)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Bởi vì

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n+1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|) &\leq \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\infty} (1 - |\tilde{c}_j| + 1 - |\tilde{d}_j|) \\
&= \sum_{ind(j,k) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - |c_{jk}| + 1 - |d_{jk}|)* \\
&\leq \sum_{ind(j,k) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2(1 - r_{jk}) \\
&= 2 \sum_{j \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - s_j).
\end{aligned}$$

Để chứng minh tính chất cuối, ta chú ý, nếu $\xi = e^{i\theta} \in F$, thì $\theta \neq \arg \alpha$ với mọi $\alpha \in B$. Chính xác hơn, ta có

$$|\theta - \arg c_{mn}| \geq \frac{1}{2} \Big(\frac{\psi_m - \varphi_m}{2\pi} \Big)^n, |\theta - \arg d_{mn}| \geq \frac{1}{2} \Big(\frac{\psi_m - \varphi_m}{2\pi} \Big)^n, \quad \forall m, n \geq 1.$$

Mặt khác,

$$1 - |c_{mn}| = 1 - |d_{mn}| = (1 - r_{mn}) \Big(\frac{\psi_m - \varphi_m}{2\pi} \Big)^n.$$

Theo Bổ đề 2.3.4 ta có đánh giá sau

$$\frac{1 - |c_{mn}|}{|1 - \bar{c}_{mn}\xi|} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1 - |c_{mn}|}{|\theta - \arg c_{mn}|} \leq \pi(1 - r_{mn}).$$

Bất đẳng thức tương tự như trên đúng với d_{mn}.

Vậy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-|\alpha_j|}{|1-\bar{\alpha}_j\xi|} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(\frac{1-|c_{mn}|}{|1-\bar{c}_{mn}\xi|} + \frac{1-|d_{mn}|}{|1-\bar{d}_{mn}\xi|} \Big)$$
$$\leq 2\pi \sum_{m,n=1}^{\infty} (1-r_{mn}) < \infty.$$

Để có khẳng định cuối ta chú ý

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1-|\alpha_j|}{|1-\bar{\alpha}_j\xi|} \leq \sum_{ind(m,n)\geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \Big(\frac{1-|c_{mn}|}{|1-\bar{c}_{mn}\xi|} + \frac{1-|d_{mn}|}{|1-\bar{d}_{mn}\xi|} \Big)$$
$$\leq 2\pi \sum_{ind(m,n)\geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} (1-r_{mn}).$$

Theo Bổ đề 2.3.3, căn bậc k của số hạng cuối tiến tới 0 khi $k \to \infty$.

Vậy bổ đề đã được chứng minh. $\square$

Chứng minh. (Mệnh đề 2.3.2) Giả sử $B := \{\alpha_j\}_{j\geq 1} \subset \Delta$ là dãy xây dựng trong Bổ đề 2.3.5. Đặt

$$f_j(z) := \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \frac{\alpha_j - z}{1-\bar{\alpha}_j z}, \qquad r_m(z) := \prod_{j=1}^{m} f_j(z).$$

Kí hiệu $A := \{\frac{1}{\bar{\alpha}_j} : j \geq 1\}$. Khi đó tập các điểm tụ của A là F. Ta cố định tập compact $K \subset \mathbb{C} \setminus \bar{A}$, với $j \geq 1$ và $z \in K$ ta có

$$|f_j(z) - 1| = \Big| \frac{(\alpha_j + |\alpha_j| z)(1-|\alpha_j|)}{\alpha_j(1-\bar{\alpha}_j z)} \Big| \leq M_K(1-|\alpha_j|),$$

ở đó $M_K > 0$ chỉ phụ thuộc vào K và A. Theo Bổ đề 2.3.5(a) và Mệnh đề 2.3.1 suy ra khẳng định thứ hai. Để thay sự hội tụ nhanh của hàm f_j tại

$\xi \in F$ ta viết

$$|f_j(\xi) - 1| = \Big|\frac{(\alpha_j + |\alpha_j|\xi)(1 - |\alpha_j|)}{\alpha_j(1 - \bar{\alpha}_j\xi)}\Big| \leq 4\frac{1 - |\alpha_j|}{|(1 - \bar{\alpha}_j\xi)|},$$

sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh của Mệnh đề 2.3.1 ta được

$$\Big|\prod_{j=m+1}^{\infty} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}\frac{\alpha_j - \xi}{1 - \bar{\alpha}_j\xi} - 1\Big| \leq 8\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1 - |\alpha_j|}{|1 - \bar{\alpha}_j\xi|}.$$

Mặt khác, theo Định lý 1 trong [7], ta có $\lim_{n\to\infty} r_n(\xi) = f(\xi)$. Vậy ta có thể tìm được $M_\xi > 0$ sao cho $|r_n(\xi)| \leq M_\xi$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó

$$|f(\xi) - r_m(\xi)| \leq 8M_\xi \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1 - |\alpha_j|}{|1 - \bar{\alpha}_j\xi|}.$$

Khẳng định (c) suy ra từ Bổ đề 2.3.5(c). Cuối cùng, ta để ý rằng, tập các không điểm của r_m chính là $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ và mọi điểm của F đều là điểm tụ của $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$ nên hàm giới hạn f không thể được thác triển chỉnh hình qua bất cứ điểm nào của F. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Chương 3

Hội tụ của chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các điều kiện đủ để một chuỗi lũy thừa hình thức hội tụ trên một số đủ nhiều các đường thẳng phức qua gốc $O \in \mathbb{C}^n$ là hội tụ trên một lân cận của $O \in \mathbb{C}^n$.

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [2] trong danh mục các công trình sử dụng trong luận án.

3.1 Một số kiến thức cơ sở

Ta nói rằng E là đa cực xạ ảnh nếu E chứa trong phần $-\infty$ của một hàm trong $HPSH(\mathbb{C}^n)$ mà nó không đồng nhất $-\infty$. Rõ ràng tính đa cực xạ ảnh suy ra tính đa cực thông thường. Điều ngược lại là không đúng và sẽ được trình bày trong của Mệnh đề 3.1.1.

Cho $E \subset \mathbb{C}^n$ là tập bị chặn, hàm cực trị Siciak của E được xác định như sau:

$$V_E(z) := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n), u|_E \leq 0\}.$$

Ở đó $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ là lớp Lelong các hàm u trong $PSH(\mathbb{C}^n)$ với độ tăng logarit, nghĩa là $u(z) \leq \log|z| + C_u$ với hằng số C_u không phụ thuộc vào z.

Nếu E là không đa cực thì nó là chính quy hóa nửa liên tục trên $V_E^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ (xem Hệ quả 5.2.2 [13]).

Trong chương này kí hiệu $\Delta(0, R)$ là đĩa với bán kính R với tâm $0 \in \mathbb{C}$ và $\Delta^n(0, R)$ cho đa đĩa $\Delta(0, R) \times \cdots \times \Delta(0, R) \subset \mathbb{C}^n$, và $S^n(0, R)$ là biên cốt yếu của $\Delta^n(0, R)$ nghĩa là $S^n(0, R) := \{(z_1, \cdots, z_n) : |z_1| = \cdots = |z_n| = R\}$.

Đầu tiên, ta phát biểu và chứng minh một số tính chất cơ bản của tập đa cực xạ ảnh.

Mệnh đề 3.1.1. *(a) Nếu P là một đa thức thuần nhất trên $\mathbb{C}^n$ triệt tiêu trên các tập đa cực không xạ ảnh $A \subset \mathbb{C}^n$ thì $P \equiv 0$.*

(b) $A \subset \mathbb{C}^n$ là tập con đa cực xạ ảnh nếu và chỉ nếu $\pi(A)$ là đa cực trong $\mathbb{C}^{n-1}$, ở đây

$$\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{z_n = 0\} \mapsto \mathbb{C}^{n-1}, \pi(z_1, \cdots, z_n) := \Big(\frac{z_1}{z_n}, \cdots, \frac{z_{n-1}}{z_n}\Big).$$

(c) Nếu $A \subset \mathbb{C}^n$ là tập đa cực không xạ ảnh thì

$$\tilde{A} := \{tz : |t| < 1, z \in A\}$$

là tập duy nhất với hàm chỉnh hình trên hình cầu đơn vị $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$, nghĩa là hàm chỉnh hình trên $\mathbb{B}_n$ sao cho triệt tiêu trên $\tilde{A}$ phải bằng 0 khắp nơi.

Nhận xét. Cho $A := \{(z, z^2) : |z|^2 + |z|^4 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$. Khi đó, A là đa cực trong $\mathbb{C}^2$ chứa trong một siêu mặt đại số. Tuy nhiên, từ $\pi(A)$ là đường tròn trong $\mathbb{C}$ hiển nhiên nó không đa cực, A là không đa cực xạ ảnh trong $\mathbb{C}^2$ bởi Mệnh đề 3.1.1 (b).

Chứng minh. (a) Giả sử $P \equiv 0$ trên A. Khi đó hàm

$$u(z) = \frac{1}{\deg P} \log |P(z)|,\ z \in \mathbb{C}^n,$$

là đa điều hòa dưới thuần nhất trên $\mathbb{C}^n$, $u \equiv -\infty$ trên A. Bởi vì A là tập đa cực không xạ ảnh suy ra $u \equiv -\infty$ và ở đây $P \equiv 0$ trên $\mathbb{C}^n$.

(b) Trước hết, giả sử A là đa cực xạ ảnh. Khi đó, tồn tại $u \in HPSH(\mathbb{C}^{n-1})$ sao cho $u \not\equiv -\infty, u|_A \equiv -\infty$. Bởi vậy, ta có

$$u(\lambda z', \lambda z_n) = \log |\lambda| + u(z', z_n), z' = (z_1, \cdots, z_{n-1}), \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ta có $v(z') := u(z', 1) \in PSH^{n-1}(\mathbb{C}^n), v \not\equiv -\infty$ và $v|_{\pi(A)} \equiv -\infty$. Bởi vậy, $\pi(A)$ là đa cực trong $\mathbb{C}^{n-1}$. Giả sử ngược lại $\pi(A)$ là đa cực trong $\mathbb{C}^{n-1}$.

Khi đó, tồn tại $v \in PSH(\mathbb{C}^{n-1}), v \not\equiv -\infty$ sao cho $v|_{\pi(A)} \equiv -\infty$. Điều này chỉ ra rằng ta có thể chọn được $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n-1})$. Đặt

$$u(z', z_n) := v(z'/z_n) + \log|z_n|,\ \forall z = (z', z_n) \in \Omega := \mathbb{C}^n \setminus \{z_n = 0\}.$$

Khi đó, ta dễ thấy $u \in PSH(\Omega), v \not\equiv -\infty$. Hơn nữa, bởi giả thiết về độ tăng của v, ta có u bị chặn địa phương trên trong một lân cận của siêu mặt $\{z_n = 0\}$. Do đó, u thác triển tới một hàm (vẫn được kí hiệu là u) thuộc $PSH(\mathbb{C}^n)$ (xem Định lý 2.9.22 trong [13]). Ta cũng dễ dàng kiểm tra được $u \in HPSH(\mathbb{C}^n)$ và $u|_A \equiv -\infty$. Vì vậy, A đa cực xạ ảnh trong $\mathbb{C}^n$.

(c) Cho g là hàm chỉnh hình trên $\mathbb{B}^n$ sao cho $g \equiv 0$ trên $\tilde{A}$. Giả sử $g \not\equiv 0$. Khi đó, ta có thể viết

$$g = \sum_{j \geq j_0} Q_j(z),$$

ở đây Q_j là đa thức thuần nhất bậc j và $Q_{j_0} \not\equiv 0$. Bởi vì

$$g(tz) = \sum_{j \geq j_0} t^j Q_j(z) \equiv 0, \forall z \in A, \forall |t| < 1,$$

nên ta suy ra $Q_{j_0} \equiv 0$ trên A. Theo (a), ta suy ra $Q_{j_0} \equiv 0$. Đây là điều mâu thuẫn. $\square$

3.2 Hội tụ của chuỗi lũy thừa hình thức

Ta cần bổ đề sau để chứng minh kết quả chính của chương.

Bổ đề 3.2.1. *Cho* $\{u_k\}_{k\geq 1} \subset HPSH(\mathbb{C}^n)$ *là dãy các hàm bị chặn trên địa phương. Đặt tập*

$$u := \limsup_{k\to\infty} u_k; \quad S := \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : u(z) < u^*(z); z_n \neq 0\}.$$

Khi đó $\pi(S)$ *là đa cực trong* $\mathbb{C}^{n-1}$.

Chứng minh. Với $k \geq 1$ ta đặt

$$v_k(z_1, ..., z_{n-1}) := u_k\Big(\frac{z_1}{z_n}, ..., \frac{z_{n-1}}{z_n}, 1\Big), (z_1, ...z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{z_n = 0\}.$$

Khi đó

$$v_k(z_1, ..., z_{n-1}) + \log|z_n| = u_k(z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n),\ \forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{z_n = 0\}.$$

Hơn nữa, theo giả thiết dãy $\{v_k\}_{k\geq 1} \subset PSH(\mathbb{C}^{n-1})$ là bị chặn trên đều địa phương. Ta đặt $v := \limsup\limits_{k\to\infty} v_k$. Khi đó, ta có

$$v(z_1, ..., z_{n-1}) + \log|z_n| = u(z_1, ..., z_n),\ \forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{z_n = 0\}.$$

Như vậy $v^* \in PSH(\mathbb{C}^{n-1})$ và

$$v^*(z_1, ..., z_{n-1}) + \log|z_n| = u^*(z_1, ..., z_n),\ \forall (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n, z_n \neq 0.$$

Ta có

$$\pi(S) \subset \{(z_1, ...z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : v(z_1, ..., z_{n-1}) < v^*(z_1, ..., z_{n-1})\}.$$

Áp dụng Định lý Bedford-Taylor về tính đa cực của các tập bỏ được (xem Định lý 4.7.6 trong [13]) ta thấy rằng tập bên phải là đa cực. Bởi vậy $\pi(S)$ phải là tập đa cực. $\square$

Kết quả chính của chương này là định lý sau.

Định lý 3.2.2. *Cho $A \subset \mathbb{C}^n$ là một tập đa cực không xạ ảnh và $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy chuỗi lũy thừa hình thức trong $\mathbb{C}^n$ và r_0 là một số dương. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(a) Nếu với mỗi $a \in A$, hạn chế của $\{f_m\}_{m\geq 1}$ trên l_a là một dãy các hàm chỉnh hình bị chặn đều địa phương trên đĩa $\Delta(0, r_0) \subset \mathbb{C}$ thì tồn tại $r_1 > 0$ (chỉ phụ thuộc vào r_0, A) sao cho $\{f_m\}_{m\geq 1}$ biểu diễn một dãy hàm chỉnh hình bị chặn đều địa phương trên đa đĩa $\Delta^n(0, r_1)$.

(b) Nếu với mỗi $a \in A$ hạn chế của $\{f_m\}_{m\geq 1}$ trên l_a là một dãy hàm chỉnh hình trên đĩa $\Delta(0, r_0) \subset \mathbb{C}$ hội tụ đều trên các tập compact thì tồn tại $r_1 > 0$ (chỉ phụ thuộc vào r_0, A) sao cho $\{f_m\}_{m\geq 1}$ xác định một dãy hàm chỉnh hình mà nó hội tụ đều trên các tập compact của $\Delta^n(0, r_1)$.

Chứng minh. (a) Với $m \geq 1$ ta viết

$$f_m := \sum_{j\geq 0} P_{j,m},$$

ở đó $P_{j,m}$ là các đa thức thuần nhất bậc j. Theo giả thiết, với $z \in A, t \mapsto$

$f_m(tz), m \geq 1$, là dãy các hàm chỉnh hình trên $\Delta(0, r_0)$ nó bị chặn đều trên các tập compact. Bởi vậy $m \geq 1, z \in A$, ta có thể khai triển

$$f_m(tz) = \sum_{j \geq 0} t^j P_{j,m}(z), \ \forall t \in \Delta(0, r_0).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta thu được với $m \geq 1$,

$$|P_{j,m}(z)| \leq \frac{M(z,r)}{r^j}, \ \forall j \geq 0, \forall r \in (0, r_0), \forall z \in A,$$

ở đó

$$M(z,r) := \sup\{|f_m(tz)| : m \geq 1, |t| < r\}.$$

Ta có

$$\frac{1}{j} \log |P_{j,m}(z)| \leq \frac{1}{j} \log M(z,r) - \log r, \forall r \in (0, r_0), \forall j, m \geq 1, \forall z \in A. \quad (3.1)$$

Tiếp theo, với $N \geq 1$ ta đặt các tập

$$A_N := \{z \in A : M(z, \frac{r_0}{2}) < N, |z_n| > 1/N\};$$

$$B_N := \{z \in A : \|z\| < N, |z_n| > 1/N\}.$$

Điều này suy ra

$$\pi(A) = \bigcup_{N \geq 1} \pi(A_N) = \bigcup_{N \geq 1} \pi(B_N),$$

ở đó π là ánh xạ được cho trong Mệnh đề 3.1.1 (b). Bởi vì A là tập không đa cực xạ ảnh, theo Mệnh đề 3.1.1 (b) $\pi(A)$ là không đa cực, vì thế ta có thể tìm được $N_0, N_1 \geq 1$ sao cho $\pi(A_{N_0})$ và $\pi(B_{N_1})$ cũng là các tập không đa cực. Để ý rằng N_1 chỉ phụ thuộc vào A. Vì thế với $z \in A_{N_0}$, bởi tính thuần nhất của $P_{j,m}$ và (3.1), với $j, m \geq 1$ ta có đánh giá

$$\frac{1}{j}\log|P_{j,m}(\pi(z),1)| = \frac{1}{j}\log|P_{j,m}(z)| - \log|z_n| \leq 2\log N_0 - \log(r_0/2). \quad (3.2)$$

Ta đặt

$$\tilde{P}_{j,m}(z') = P_{j,m}(z',1), z = (z', z_n).$$

Theo (3.2), ta suy ra các hàm đa điều hòa dưới

$$\left\{\frac{1}{j}\log|\tilde{P}_{j,m}|\right\}_{j,m\geq 1}$$

là bị chặn trên đều trên tập không đa cực $\pi(A_{N_0}) \subset \mathbb{C}^{n-1}$. Vì thế, áp dụng bất đẳng thức Bernstein-Walsh (2.1) ta suy ra các hàm bị chặn trên đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^{n-1}$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh:

(*) *Với mỗi $R > 0$, dãy*

$$\left\{\frac{1}{j}\log|P_{j,m}|\right\}_{j,m\geq 1}$$

là bị chặn trên đều trên $\Delta^n(0, R)$.

Thật vậy, theo nguyên lý mô đun cực đại, ta dễ dàng kiểm tra được tính bị chặn đều trên các đa đĩa $S^n(0, R)$. Sử dụng tính thuần nhất của $P_{j,m}$, với

$z \in S^n(0,R)$ ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{1}{j}\log|P_{j,m}(z)| =& \frac{1}{j}\log|P_{j,m}(\pi(z),1)| + \log R\\ &\leq \sup_{z'\in S^{n-1}(0,1)} \frac{1}{j}\log|\tilde{P}_{j,m}(z')| + \log R.\end{aligned}$$

Vậy, (*) được chứng minh.

Tiếp theo, từ $\pi(B_{N_1}) \subset \mathbb{C}^{n-1}$ là không đa cực, ta có thể chọn $r_1 > 0$ sao cho

$$\log\Big(\frac{N_1 r_1}{r_0}\Big) + \sup_{z'\in\Delta^{n-1}(0,1)} V^*_{\pi(B_{N_1})}(z') < 0. \tag{3.3}$$

Ta chứng minh khẳng định tiếp theo

(**) *Với mỗi tập compact $K \subset \Delta^n(0,r_1)$, tồn tại $j_0 \geq 1$ và $\delta > 0$ sao cho*

$$\frac{1}{j}\log\|P_{j,m}\|_K < -\delta, \forall j \geq j_0, \forall m \geq 1.$$

Giả sử khẳng định trên là sai, khi đó ta có thể tìm được $r_2 \in (0,r_1)$, dãy $\{z_k\}_{k\geq 1} \subset \Delta^n(0,r_2)$ và hai dãy số hữu tỉ dương $\{j_k\}_{k\geq 1}, \{m_k\}_{k\geq 1}$, với $j_k \uparrow \infty$ sao cho

$$\frac{1}{j_k}\log|P_{j_k,m_k}(z_k)| > -\frac{1}{k},\ \forall k \geq 1. \tag{3.4}$$

Với $k \geq 1$ ta viết

$$u_k(z) = \frac{1}{j_k}\log|P_{j_k,m_k}(z)|, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Bởi (*) suy ra $u^* \in HPSH(\mathbb{C}^n)$, ở đó $u := \limsup\limits_{k\to\infty} u_k$. Để ý rằng

$$u_k(z) - \log|z| = \frac{1}{j_k}\log\Big|P_{j_k,m_k}\Big(\frac{z}{|z|}\Big)\Big|,\ \forall z \neq 0, \forall k \geq 1.$$

Vì vậy, theo (*) ta suy ra $u_k(z) - \log|z|$ là bị chặn trên đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Vậy $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Mặt khác, theo (3.1) với $j = j_k, m = m_k$ khi cho $k \to \infty$ ta được

$$u(z) \leq -\log r_0,\ \forall z \in A.$$

Sử dụng Bổ đề 3.2.1, ta có thể tìm được một tập con $S \subset A \setminus \{z_n = 0\}$ sao cho $\pi(S)$ là đa cực trong $\mathbb{C}^{n-1}$ và $u = u^*$ trên $A \setminus S$. Do đó

$$u^*(z) \leq -\log r_0,\ \forall z \in A \setminus S. \tag{3.5}$$

Với $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ ta đặt $v(z') := u^*(z', 1)$. Khi đó, $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n-1})$ và

$$u^*(z) = \log|z_n| + u^*(\pi(z), 1) = \log|z_n| + v(\pi(z)),\ \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{z_n = 0\}. \tag{3.6}$$

Bởi vậy với $z \in B_{N_1} \setminus S$ ta thu được

$$v(\pi(z)) = u^*(z) - \log|z_n| < \log\left(\frac{N_1}{r_0}\right).$$

Ở đây đẳng thức cuối được suy ra từ (3.5) và cách chọn của B_{N_1}.

Mặt khác, từ $\pi(S)$ là tập đa cực và từ $\pi(B_{N_1})$ bị chặn, theo Hệ quả 5.2.5 trong [13] ta được

$$V^*_{\pi(B_{N_1})\setminus\pi(S)} = V^*_{\pi(B_{N_1})}.$$

Như vậy bởi cách chọn của r_1 trong (3.3) và cách xác định của hàm cực trị Siciak ta thu được

$$\begin{aligned} v(z') &\leq \log\left(\frac{N_1}{r_0}\right) + \sup_{\Delta^{n-1}(0,1)} V^*_{\pi(B_{N_1}\setminus S)} \\ &\leq \log\left(\frac{N_1}{r_0}\right) + \sup_{\Delta^{n-1}(0,1)} V^*_{\pi(B_{N_1})\setminus \pi(S)} \\ &= \log\left(\frac{N_1}{r_0}\right) + \sup_{\Delta^{n-1}(0,1)} V^*_{\pi(B_{N_1})} < -\log r_1,\ \forall z' \in \Delta^{n-1}(0,1). \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (3.6), for $z \in S^n(0, r_1)$ ta được

$$u^*(z) = v(\pi(z)) + \log r_1 < 0.$$

Theo nguyên lý mô đun cực đại thì $u \leq u^* < 0$ trên $\Delta^n(0, r_1)$. Bây giờ áp dụng Bổ đề Hartogs cho dãy $\{u_k\}_{k\geq 1}$ ta được

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{\Delta^n(0,r_2)} u_k < 0.$$

Ta có mâu thuẫn với (3.4). Vậy (**) được chứng minh.

Bây giờ ta sử dụng (*) và (**) để hoàn thành việc chứng minh. Theo tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass và đánh giá (**), ta dễ dàng suy ra với mỗi $m \geq 1$ chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{j\geq 0} P_{j,m}$ hội tụ đều trên các tập compact của $\Delta^n(0, r_1)$ tới một hàm chỉnh hình g_m. Theo bất đẳng thức Cauchy, với mỗi $r \in (0, r_0)$ và $m \geq 1$ tồn tại hằng số $M(r, m) > 0$ sao cho

$$|a_{m,\alpha_1\cdots\alpha_n}| \leq \frac{M(r,m)}{r^{|\alpha|}}, \forall(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in {\mathbb{Z}_+}^n,$$

ở đó $a_{m,\alpha_1\cdots\alpha_n}$ là các hệ số của chuỗi lũy thừa hình thức f_m. Bởi vậy $f_m = g_m$ xác định một hàm chỉnh hình trên $\Delta^n(0, r_1)$ với mỗi $m \geq 1$. Hơn nữa, bởi

(*) và (**), ta có thể kiểm tra được $\{f_m\}_{m\geq 1}$ cũng là bị chặn đều trên các tập compact của $\Delta^n(0, r_1)$.

(b) Bởi vì $\{f_m|_{l_a}\}_{m\geq 1}$ bị chặn đều trên các tập compact của $\Delta(0, r_0)$ với mỗi $a \in A$, theo (a) ta có thể tìm được $r_1 > 0$ (chỉ phụ thuộc vào r_0, A) sao cho $\{f_m\}_{m\geq 1}$ bị chăn đều trên các tập compact của $\Delta^n(0, r_1)$. Bởi giả thiết, $\{f_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ điểm trên $\tilde{A} := \{tz : t \in \mathbb{C}, z \in A\}$ ở đó là tập duy nhất cho các hàm nguyên trong $\mathbb{C}^n$ được nói đến trong Mệnh đề 3.1.1 (c), áp dụng định lý Vitali, ta suy ra $\{f_m\}_{m\geq 1}$ là hội tụ đều trên các tập compact của $\Delta^n(0, r_1)$. Định lý được chứng minh □

Nhận xét. Bởi vì các số N_1 và B_{N_1} chỉ phụ thuộc vào A, và cách chọn của r_1 (3.3) ta nhận thấy nếu "$r_0 = \infty$" nghĩa là $\{f_m|_{l_a}\}_{m\geq 1}$ xác định một dãy các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$ khi đó ta có thể chọn "$r_1 = \infty$" nghĩa là $\{f_m\}_{m\geq 1}$ xác định một dãy của các hàm nguyên trên $\mathbb{C}^n$.

Tiếp theo kết quả quan trọng của nhận xét trên (từ Định lý 3.2.2) có thể so sánh với một kết quả của Forelli trong [10] ở đó khẳng định rằng hàm f trên hình cầu đơn vị $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ là hàm chỉnh hình nếu f là $\mathcal{C}^\infty$ trên $\mathbb{B}_n$ và hạn chế của nó trên mọi đường thẳng phức đi qua điểm gốc là một hàm chỉnh hình trên đĩa $\Delta(0, 1)$.

Hệ quả 3.2.3. *Cho* $f : \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ *là hàm khả vi vô hạn và* $A \subset \partial\mathbb{B}_n$ *là một tập mở. Giả sử hạn chế của* f *trên* l_a *là một hàm nguyên trên* $\mathbb{C}$ *với mỗi* $a \in A$*. Khi đó tồn tại hàm nguyên* F *trên* $\mathbb{C}^n$ *sao cho* $F = f$ *trên* $\mathbb{B}_n \cap l_a$ *với mỗi* $a \in A$*.*

Hệ quả trên được suy ra trực tiếp từ kết quả sau đây

Hệ quả 3.2.4. *Cho* $\{f_m\}_{m\geq 1}$ *là dãy các hàm khả vi vô hạn xác định trên hình cầu đơn vị* $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ *và* $A \subset \partial\mathbb{B}_n$ *là một tập mở. Giả sử với mỗi* $a \in A$*, hạn chế của* $\{f_m\}_{m\geq 1}$ *trên* l_a *được thác triển tới dãy hàm nguyên trên* $\mathbb{C}$ *và hội tụ đều trên các tập compact của* $\mathbb{C}$*. Khi đó tồn tại dãy hàm nguyên* $\{F_m\}_{m\geq 1}$ *trên* $\mathbb{C}^n$ *hội tụ đều trên các tập compact trong* $\mathbb{C}^n$ *sao cho với* $m \geq 1$*,* $F_m = f_m$ *trên* $\mathbb{B}_n \cap l_a$ *với mọi* $a \in A$*.*

Chứng minh. Với mỗi $m \geq 1$, ta kí hiệu F_m là chuỗi khai triển Taylor của f_m. Khi đó ta có

$$F_m(z) = \sum_{j\geq 0} P_{j,m}(z, \bar{z}),$$

ở đó $P_{j,m}$ là đa thức thuần nhất bậc j trong $z_1, \cdots, z_n, \overline{z_1}, \cdots, \overline{z_n}$. Để ý rằng hạn chế của F_m trên mỗi đường thẳng phức $t \mapsto ta, a \in A$, là biểu thức có dạng

$$F_m(ta) = \sum_{j\geq 0} P_{j,m}(ta, \bar{t}\bar{a}) = \sum_{j\geq 0} \Big(\sum_{\alpha+\beta=j} t^\alpha \bar{t}^\beta P_{\alpha,\beta,m}(a, \bar{a}) \Big).$$

Ở đây $P_{\alpha,\beta,m}(z,\overline{z})$ là đa thức thuần nhất bậc α theo z và bậc β theo $\overline{z}$. Bởi vì $t \mapsto f_m(ta)$ là chỉnh hình trên t, ta suy ra $P_{\alpha,\beta,m} \equiv 0$ trên A nếu $\beta \geq 1$. Bởi tính thuần nhất của $P_{\alpha,\beta,m}$ và tính mở của tập A (liên quan tới $\partial\mathbb{B}_n$), ta suy ra $P_{\alpha,\beta,m} \equiv 0$ trên tập mở $\{ta : t \in \mathbb{C}, a \in A\}$. Điều đó suy ra $P_{\alpha,\beta,m} \equiv 0$ nếu $\beta \geq 1$. Bởi vậy $P_{j,m}$ không chứa lũy thừa của $\overline{z}$ với mọi $j \geq 0$ và do đó F_m là chuỗi lũy thừa hình thức của z trong $\mathbb{C}^n$. Theo Định lý 3.2.2 (b) và chú ý rằng A không là đa cực xạ ảnh, ta suy ra F_m xác định hàm nguyên trên $\mathbb{C}^n$. Đặc biệt $F_m = f_m$ trên $\mathbb{B}_n \cap \mathbb{C}a, \forall a \in A$. Hơn nữa, theo Định lý 3.2.2(b), $\{F_m\}_{m\geq 1}$ xác định một dãy các hàm nguyên mà nó hội tụ đều trên các tập compact trong $\mathbb{C}^n$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Câu hỏi mở. Một vấn đề chưa giải quyết được bằng cách làm của chúng tôi, đó là trong Định lý 3.2.2, sự hội tụ đều của họ $\{f_m|_{l_a}\}_{m\geq 1}$ trên các tập compact của $\Delta(0,r_0)$ có thể được thay bởi *tính chuẩn tắc* của họ này trên $\Delta(0,r_0)$ hay không?

Chương 4

Hội tụ của dãy các hàm hữu tỷ trên $\mathbb{C}^n$

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày các điều kiện đủ để một dãy các hàm hữu tỷ là hội tụ theo dung lượng trên một miền nếu như dãy hàm này hội tụ điểm đủ nhanh trên một tập không quá nhỏ.

Kết quả của chương này được công bố trong bài báo [3] trong Danh mục các công trình sử dụng trong luận án.

4.1 Một số kết quả bổ trợ

Giả sử $\mathcal{A} := \{\chi_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm với biến thực xác định trên $[0, \infty)$, ta xây dựng một số kiểu hội tụ theo trọng $\mathcal{A}$. Với trường hợp đặc biệt $\chi_m(t) = t^{1/2m}$. Trước hết ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.1.1. *Cho* $\{f_m\}_{m\geq 1}, f$ *là Borel, các hàm đo được với giá trị phức xác định trên miền* $D \subset \mathbb{C}^n$ *và* X *là một tập con Borel của* D*. Ta nói dãy* $\{f_m\}_{m\geq 1}$*:*

(i) là $\mathcal{A}-$*hội tụ điểm tới* f *trên* X *nếu*

$$\lim_{m\to\infty} \chi_m(|f_m(x) - f(x)|^2) = 0 \ \forall x \in X;$$

(ii) là $\mathcal{A}-$*hội tụ theo dung lượng tới* f *trên* X *nếu với mỗi* $\varepsilon > 0$ *ta có*

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{cap}(X_{m,\varepsilon}, D) = 0,$$

ở đây $X_{m,\varepsilon} := \{x \in X : \chi_m(|f_m(x) - f(x)|^2) > \varepsilon\}$*;*

(iii) là $\mathcal{A}-$*hội tụ theo dung lượng tới* f *trên* D *nếu tính chất (ii) đúng cho mọi tập con Borel* X *của* D*;*

(iv) là $\mathcal{A}-$*hội tụ đều tới* f *trên* X *nếu*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in X} \chi_m(|f_m(x) - f(x)|^2) = 0.$$

Nhận xét. (a) Bởi vì tính chất (1.1) của dãy chấp nhận được ta có $\mathcal{A}$-hội tụ điểm (tương ứng. $\mathcal{A}-$hội tụ theo dung lượng) suy ra (chuẩn) hội tụ điểm (tương ứng hội tụ theo dung lượng).

(b) Khái niệm hội tụ nhanh theo dung lượng được đưa ra bởi Bloom trong [5] là $\mathcal{A}-$hội tụ theo dung lượng theo nghĩa của chúng tôi cho $\mathcal{A} := \{t^{\frac{1}{2m}}\}_{m\geq 1}$.

Ta có một số kết quả về các dãy chấp nhận được.

Bổ đề 4.1.2. *Cho* $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$ *và* $\{\tilde{\chi}_m\}_{m\geq 1}$ *là các dãy thỏa mãn (1.1), (1.2) và (1.3). Khi đó các ta có các khẳng định sau:*

(a) $\chi_m(0) \to 0$ *khi* $m \to \infty$.

(b) Các hàm $t \mapsto \frac{t\chi_m'(t)}{\chi_m(t)}$ *và* $t \mapsto \frac{t\tilde{\chi}_m'(t)}{\tilde{\chi}_m(t)}$ *là tăng trên* $(0, \infty)$ *với mỗi* m.

(c) $\chi_m, \tilde{\chi}_m$ *là tăng ngặt trên* $(0, \infty)$.

(d) $\sup_{m\geq 1}(\chi_m(a^m) + \tilde{\chi}_m(a^m)) < \infty$ *với mọi* $a > 0$.

Chứng minh. (a) Ta chỉ cần áp dụng (1.1) với dãy $a_m = 0$ với mọi m.

(b) Đặt

$$\varphi_m(t) := \frac{t\chi_m'(t)}{\chi_m(t)}, t > 0.$$

Bằng cách tính toán trực tiếp và tính chất (1.2) ta có

$$\varphi_m'(t) = \frac{\chi_m(t)(\chi_m'(t) + t\chi_m''(t)) - t(\chi_m'(t))^2}{\chi_m(t)^2} \geq 0.$$

Bởi vậy φ_m tăng trên $(0, \infty)$. Bởi lí do tương tự ta cũng có $t \mapsto \frac{t\tilde{\chi}_m'(t)}{\tilde{\chi}_m(t)}$ tăng trên $(0, \infty)$.

(c) Ta chứng minh rằng $\chi_m'(t) > 0$ trên $(0, \infty)$. Giả sử ngược lại, khi $\chi_m'(t_0) \leq 0$ với $t_0 > 0$. Suy ra $\varphi_m(t_0) \leq 0$. Bởi vì tính chất (b) nên $\varphi_m \leq 0$ trên $(0, t_0)$. Bởi vậy $\chi_m' \leq 0$ on $(0, t_0)$. Điều này suy ra $\chi_m(0) \geq \chi_m(t_0) \geq 0$ với mỗi m. Mặt khác, theo (a), $\lim_{m\to\infty} \chi_m(0) = 0$, vì vậy $\lim_{m\to\infty} \chi_m(t_0) =$

0. Bởi $t_0 > 0$, ta được điều mâu thuẫn với (1.1). Vậy χ_m tăng ngặt trên $(0, \infty)$, và cũng suy ra $\tilde{\chi}_m$ bởi lập luận tương tự.

(d) Không mất tính tổng quát ta giả sử $a > 1$, bởi vì $\chi_m, \tilde{\chi}_m$ là hai dãy tăng ngặt trên $(0, \infty)$. Vì vậy kết luận được suy ra bằng cách lấy $y = 1$, và $x = y$ trong (1.3) với chú ý rằng bởi (1.1) ta có $\inf\limits_{m \geq 1} \chi_m(1) > 0, \inf\limits_{m \geq 1} \tilde{\chi}_m(1) > 0$. $\square$

4.2 Hội tụ có trọng của các hàm hữu tỉ

Kết quả chính của chương này là định lý sau

Định lý 4.2.1. *Cho $\{r_m\}_{m \geq 1}$ là dãy các hàm hữu tỉ xác định trên $\mathbb{C}^n, f$ là một hàm chỉnh hình xác định trên miền $D \subset \mathbb{C}^n$ và $\mathcal{A} := \{\chi_m\}_{m \geq 1}$ là dãy chấp nhận được. Giả sử rằng $\{r_m\}_{m \geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ điểm tới f trên một tập con Borel không đa cực X của D. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(a) $\{r_m\}_{m \geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ theo dung lượng tới f trên D.

(b) Tồn tại một tập con đa cực E của $\mathbb{C}^n$ với tính chất: Với mỗi $z_0 \in D \setminus E$ và với mọi không gian con affine phức L của $\mathbb{C}^n$ đi qua z_0, tồn tại một dãy $\{r_{m_j}\}_{j \geq 1}$ (chỉ phụ thuộc vào z_0) sao cho $r_{m_j}\big|_{D_{z_0}}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ theo dung lượng (đối với D_{z_0}) tới $f|_{D_{z_0}}$, ở đó D_{z_0} là thành phần liên thông của $D \cap L$ chứa z_0.

(c) Giả sử rằng với mỗi $a > 0$ *ta có* $\inf_{m \geq 1} \chi_m(a^m) > 0$. *Khi đó dãy* $\{r_m\}_{m \geq 1}$ *là* $\mathcal{A}-$*hội tụ đều tới* f *trên mọi tập con compact* K *của* D *sao cho* r_m *không có cực trên một lân cận mở* U *cố định của* K *với mỗi* m.

Để chứng minh định lý trên, trước hết ta cần bổ đề sau mà hai tính chất đầu tiên của dãy chấp nhận được giữ vai trò nổi bật.

Bổ đề 4.2.2. *Cho* $\chi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *là hàm giá trị thực, liên tục thỏa mãn các tính chất:*

(a) $\chi \in \mathcal{C}^2(0, \infty)$ *và* $\chi(t) > 0$ *với mỗi* $t > 0$;

(b) $\chi(t)(\chi'(t) + t\chi''(t)) \geq t\chi'(t)^2$ *trên* $(0, \infty)$.

Khi đó với bất kì hàm chỉnh hình f *xác định trên miền* $D \subset \mathbb{C}^n$, *hàm* $u := \log \chi(|f|^2)$ *là đa điều hòa dưới trên* D.

Chứng minh. Rõ ràng e^u là hàm giá trị thực lớp $\mathcal{C}^2-$trơn trên D. Vậy ta chỉ cần kiểm tra tính điều hòa dưới của u trên $D \cap l$ với l là một đường thẳng phức tùy ý. Vậy ta có thể giả sử $n = 1$. Hơn nữa, ta chỉ cần xét trường hợp $f \not\equiv 0$. Bây giờ ta kiểm tra tính điều hòa dưới của u trên tập mở $D' := \{z \in D : f(z) \neq 0\}$. Để làm được điều này ta chú ý rằng $\varphi(t) := \log \chi(t)$ thuộc lớp $\mathcal{C}^2-$ trơn trên $(0, \infty)$. Bằng cách tính toán trực tiếp ta có đồng nhất thức sau trên D'

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = |f'|^2(\varphi'(|f|^2) + |f|^2\varphi''(|f|^2)).$$

Hơn nữa bằng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$\varphi'(|f|^2) = \frac{\chi'(|f|^2)}{\chi(|f|^2)}, \varphi''(|f|^2) = \frac{\chi(|f|^2)\chi''(|f|^2) - \chi'(|f|^2)^2}{\chi(|f|^2)^2}.$$

Bằng cách kết hợp các điều này với nhau và áp dụng (b) ta nhận được $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \geq 0$ trên D'. Từ đó u là hàm điều hòa dưới trên D'. Ta chú ý rằng $\{z : f(z) = 0\}$ là rời rạc trên D, bởi vậy theo Định lý 2.9.22 trong [13], u thác triển tới một hàm điều hòa dưới $\tilde{u}$ trên D. Cuối cùng, do e^u là liên tục trên D nên thực chất $u = \tilde{u}$ trên D. Vì vậy u là điều hòa dưới trên D. $\square$

Chứng minh. (của Định lý 4.2.1) Vì $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ điểm tới f trên X, bởi nhận xét sau Định nghĩa 4.1.1, ta có $\lim_{m\to\infty} r_m(z) = f(z)$ với mỗi $z \in X$. Hơn nữa, bằng cách thu hẹp lại tập X lại ta có thể coi $r_m(z) \in \mathbb{C}$ với mỗi $z \in X$ và $m \geq 1$. Với $N \geq 1$ ta đặt

$$X_N := \{z \in X : \sup_{m\geq 1} |r_m(z)| \leq N\}.$$

Khi đó ta có $X = \cup_{N\geq 1} X_N$. Bởi vì X là không đa cực, suy ra tồn tại $N_0 \geq 1$ sao cho $X' := X_{N_0}$ là không đa cực. Khi đó ta có thể viết $r_m = p_m/q_m$, ở đó p_m, q_m là các đa thức bậc không quá m. Do X' là bị chặn ta có thể giả sử

q_m sao cho $\|q_m\|_{X'} = 1$. Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bernstein-Walsh (2.1), ta tìm được với mỗi tập con compact K của D, một hằng số $C_K > 0$ sao cho

$$\max\{\|p_m\|_K, \|q_m\|_K\} \leq e^{C_K m} \ \forall m \geq 1. \tag{4.1}$$

Điều này suy ra

$$\|q_m f - p_m\|_K \leq e^{C_K m}(1 + \|f\|_K) \leq e^{C'_K m} \ \forall m \geq 1. \tag{4.2}$$

Tiếp theo, sử dụng Bổ đề 4.2.2 ta có hàm

$$u_m := \log \chi_m(|f - r_m|^2) + \log \tilde{\chi}_m(|q_m|^2)$$

là đa điều hòa trên $D_m := \{z \in D : q_m(z) \neq 0\}$. Cố định một tập con compact K của D. Trước hết, ta chứng minh dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn trên trên $D_m \cap K$. Thật vậy, cố định $z \in D_m \cap K$. Theo tính chất (1.3), (4.1) và (4.2) ta có

$$u_m(z) = \log\Big(\chi_m\Big(\frac{|q_m(z)f(z) - p_m(z)|^2}{|q_m(z)|^2}\Big)\tilde{\chi}_m(|q_m(z)|^2)\Big) \leq C''_K.$$

Ở đây $C''_K > 0$ không phụ thuộc vào z và m. Từ đó, bởi Định lý 2.9.22 trong [13], u_m thác triển tới hàm đa điều hòa dưới (vẫn kí hiệu là u_m) trên D. Hơn nữa, bởi đánh giá trên, u_m là bị chặn đều *đều* trên các tập compact của D. Tương tự, bởi (4.1) và Bổ đề 4.1.2(d) ta suy ra rằng

$v_m := \log \tilde{\chi}_m(|q_m|^2)$ cũng là bị chặn đều trên D. Bây giờ, ta giả sử rằng dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ không hội tụ đều tới $-\infty$ trên các tập con compact của D. Khi đó, theo Bổ đề 2.2.8, tồn tại dãy con $\{u_{m_j}\}_{j\geq 1}$ và $u \in PSH(D)$ sao cho tập $\{z \in D : \limsup\limits_{j\to\infty} u_{m_j}(z) \neq u(z)\}$ là đa cực. Bởi vì $\{v_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn trên đều địa phương và bởi giả thiết nên ta suy ra rằng $u_{m_j} \to -\infty$ hội tụ điểm trên X khi $j \to \infty$. Vậy $u = -\infty$, trên một tập con compact không đa cực của X. Điều này là vô lý. Do đó $\{u_m\}_{m\geq 1}$ tiến đều tới $-\infty$ trên các tập compact của D. Cuối cùng, chú ý rằng $\|q_m\|_{X'} = 1$, nên ta có

$$-\infty < \inf_{m\geq 1} \log \tilde{\chi}_m(1) \leq \sup_{X'} v_m.$$

Ở đây bất đẳng thức ở vế trái suy ra từ tính chất (1.1) của dãy $\{\tilde{\chi}_m\}_{m\geq 1}$. Bởi vậy $\{v_m\}_{m\geq 1}$ không thể hội tụ đều tới ∞ trên X'. Kết hợp với Bổ đề 2.2.9, ta suy ra $\chi_m(|r_m - f|^2)$ hội tụ tới 0 theo dung lượng trên D.

(b) Theo chứng minh trong (a), dãy $\{v_m\}_{m\geq 1}$ bị chặn trên đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^n$. Hơn nữa, $\{v_m\}_{m\geq 1}$ không hội tụ đều đến $-\infty$ trên tập compact nào đó của $\mathbb{C}^n$. Vì vậy, bởi Bổ đề 2.2.8 (c), tập con không đa cực E của $\mathbb{C}^n$ sao cho

$$\limsup_{m\to\infty} v_m > -\infty \text{ on } D \setminus E.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng tập E có tính chất như mong muốn. Cố định $z_0 \in D \setminus E$

và không gian con affine phức L chứa z_0. Chọn dãy $\{v_{m_j}\}_{j\geq 1}$ sao cho

$$\lim_{j\to\infty} v_{m_j}(z_0) > -\infty.$$

Kí hiệu v'_j và v''_j lần lượt là hạn chế trên $D\cap L$ của hai dãy v_{m_j} và $\log \chi_{m_j}(|f - r_{m_j}|^2)$. Theo kết quả chứng minh trong (a), ta có $v'_j + v''_j$ hội tụ đều tới $-\infty$ khi $j \to \infty$ trên các tập compact của D_{z_0}. Bây giờ theo cách chọn của v_{m_j}, ta có thể áp dụng Bổ đề 2.2.9 để suy ra dãy $e^{v''_j} = \chi_{m_j}(|r_{m_j} - f|^2)$ hội tụ theo dung lượng tới 0 trong D_{z_0}.

(c) Ta có thể giả sử rằng U là hình cầu trong $\mathbb{C}^n$, sao cho $\{r_m\}$ là không $\mathcal{A}-$hội tụ đều tới f trên K. Khi đó ta có thể tìm được một dãy con $\{r_{m_j}\}_{j\geq 1}$ sao cho

$$\inf_{j\geq 1} \sup_{z\in K} \chi_{m_j}(|r_{m_j}(z) - f(z)|^2) > 0. \tag{4.3}$$

Bởi kết quả chứng minh trong (a), $\{r_{m_j}\}_{j\geq 1}$ là $\mathcal{A}$-hội tụ theo dung lượng tới f trên D. Bởi vậy, theo Bổ đề 2.1.2 và bằng cách chuyển qua một dãy con, ta có thể giả sử rằng r_{m_j} là $\mathcal{A}$-hội tụ điểm tới f ngoài tập con đa cực của D. Sử dụng lập luận tương tự cho mệnh đề đầu của (a), ta có thể tìm được tập con compact không đa cực F của U sao cho

$$\sup_{j\geq 1} \|r_{m_j}\|_F < \infty.$$

Bây giờ ta viết $r_{m_j} := \frac{p_{m_j}}{q_{m_j}}$, ở đó $\|q_{m_j}\|_F = 1$ với mọi $j \geq 1$. Bởi lý do tương tự như trong (a) ta có

$$\log \chi_{m_j}(|r_{m_j} - f|^2) + \log \tilde{\chi}_{m_j}(|q_{m_j}|^2) \to -\infty \text{ đều trên } K \tag{4.4}$$

Chú ý rằng từ r_{m_j} không có cực trên hình cầu U, các hàm $h_j := \frac{1}{m_j} \log |q_{m_j}|$ là đa điều hòa trên U. Áp dụng bất đẳng thức Bernstein-Walsh (**??**) như trong chứng minh của (a), ta suy ra dãy $\{h_j\}$ cũng là bị chặn đều trên trên các tập con compact của D. Mặt khác, từ $\sup_F h_j = 0$ với mọi j, suy ra mỗi điểm tụ của dãy $\{h_j\}$ được lấy trong tôpô của sự hội tụ đều địa phương là không đồng nhất $-\infty$. Vậy mỗi giới hạn của dãy này phải là đa điều hòa trên U. Bởi vậy $\{h_j\}$ là bị chặn trên đều trên các tập con compact của U. Vậy ta có hằng số $a > 0$ (phụ thuộc vào K) sao cho

$$a^{m_j} \leq |q_{m_j}(z)|, \ \forall z \in K.$$

Bởi vậy, sử dụng Bổ đề 4.1.2 (c) và giả thiết của dãy $\{\tilde{\chi}_m\}_{m \geq 1}$ ta có

$$\inf_{j \geq 1} \inf_{z \in K} \log \tilde{\chi}_{m_j}(|q_{m_j}(z)|^2) > \inf_{j \geq 1} \log \tilde{\chi}_{m_j}(a^{2m_j}) > -\infty. \tag{4.5}$$

Kết hợp (4.3), (4.4) và (4.5) ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chứng minh của Định lý 4.2.1 (c) cho chúng ta một kết quả tương tự như Định lý 4.2.1 nhưng đối với dãy các đa thức.

Mệnh đề 4.2.3. *Cho* $\{p_m\}_{m\geq 1}$ *là dãy các đa thức trên* $\mathbb{C}^n(1 \leq degp_m \leq m)$ *và* f *là hàm chỉnh hình được xác định trên miền bị chặn* $D \subset \mathbb{C}^n$*. Giả sử* $\mathcal{A} := \{\chi_m\}_{m\geq 1}$ *là một dãy hàm liên tục giá trị thực xác định trên* $[0, \infty)$ *thỏa mãn (1.1), (1.2) và điều kiện bổ sung sau đây:*

$$\sup_{m\geq 1} \chi_m(a^m) < \infty, \ \forall a > 0.$$

Giả sử $\{p_m\}_{m\geq 1}$ *là* $\mathcal{A}-$*hội tụ điểm* f *trên tập con Borel không đa cực* X *của* D*. Khi đó* $\{p_m\}_{m\geq 1}$ *là* $\mathcal{A}-$*hội tụ đều tới* f *trên các tập compact của* D*.*

Chứng minh. Chứng minh của kết quả này là tương đối giống với Định lý 4.2.1. Ta có thể trình bày ngắn gọn như sau: Trước hết ta đặt tập $u_m := \chi_m(|p_m - f|^2)$. Theo Bổ đề 4.2.2, u_m là đa điều hòa dưới với mỗi $m \geq 1$. Hơn nữa, sử dụng điều kiện mở rộng trên χ_m ta suy ra dãy $\{u_m\}_{m\geq 1}$ là bị chặn trên, trên các tập con compact của D. Do $\{u_m\}_{m\geq 1}$ là hội tụ điểm tới $-\infty$ trên tập không đa cực X nên theo Bổ đề 2.2.8 (d), $\{u_m\}_{m\geq 1}$ phải hội tụ đều tới $-\infty$ trên các tập compact của D. □

Ta cũng có kết quả tương tự về dãy các đa thức trong $\mathbb{R}^n$.

Hệ quả 4.2.4. *Cho* f *là hàm giải tích thực xác định trên miền* $D \subset \mathbb{R}^n_{(x_1,\cdots,x_n)}$ *và* $\{p_m\}_{m\geq 1}$ *là dãy các đa thức* $(1 \leq degp_m \leq m)$*. Giả sử* $\mathcal{A} :=$

$\{\chi_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm trơn không âm thuộc lớp $\mathcal{C}^2$ như trong Mệnh đề 4.2.3. Giả sử $\{p_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ điểm tới f trên tập con có độ đo dương X của D. Khi đó, $\{p_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ đều tới f trên các tập compact của D.

Chứng minh. Ta lấy miền mở $D' \subset \mathbb{C}^n_{(z_1,\cdots,z_n)}, z_j = x_j + iy_j$, sao cho $D \subset D' \cap \mathbb{R}^n$ và f là chỉnh hình trên D'. Do X có độ đo Lebesgue dương trong $\mathbb{R}^n$, nên ta suy ra X là không đa cực trên $\mathbb{C}^n$. Kết luận của chúng ta bây giờ là hệ quả của Mệnh đề 4.2.3. □

Kết quả tiếp theo tổng quát cho định lý của Bloom được nhắc đến trong phần giới thiệu.

Hệ quả 4.2.5. (Định lý 2.1 trong [5]) *Cho f là hàm chỉnh hình trên miền $D \subset \mathbb{C}^n$ và $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm hữu tỉ hội tụ nhanh theo dung lượng tới f trên tập con compact không đa cực K của D. Khi đó, $\{r_m\}_{m\geq 1}$ hội tụ nhanh theo dung lượng tới f trên D.*

Chứng minh. Xét dãy có trọng chấp nhận được $\mathcal{A} := \{\chi_m\}_{m\geq 1}$ ở đây $\chi_m(t) = t^{\frac{1}{2m}}$. Giả sử ngược lại khẳng định trên là sai, khi đó tồn tại một tập con compact không đa cực K của D, dãy $\{m_j\}$ và các hằng số dương $\varepsilon, \delta > 0$ sao cho

$$\text{cap }(K_j, D) > \delta, \ \forall j \geq 1,$$

ở đó $K_j := \{z \in K : \chi_{m_j}(|r_{m_j}(z) - f(z)|^2) > \varepsilon\}$. Theo Bổ đề 2.1.2 và giả thiết, bằng cách sử dụng dãy con ta có thể giả sử $\{r_{m_j}\}_{j\geq 1}$ là $\mathcal{A}$-hội tụ điểm tới f trên tập con không đa cực K' của K. Theo Định lý 4.2.1 ta có điều cần chứng minh. □

Bằng cách sử dụng Định lý 4.2.1, ta có ngay kết quả sau về tính đơn trị của hàm chỉnh hình liên tục như đã có trong [9] (trang 306,307) và [5] (Hệ quả 2.1).

Hệ quả 4.2.6. *Cho $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm hữu tỉ trên $\mathbb{C}^n$, f chỉnh hình trên hình cầu mở B và $\mathcal{A} := \{\chi_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy chấp nhận được. Giả sử $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ điểm tới f trên tập con Borel không đa cực X của B. Khi đó miền tồn tại tự nhiên của f, được kí hiệu bới W_f, là một tập con của $\mathbb{C}^n$ và $\{r_m\}_{m\geq 1}$ là $\mathcal{A}-$hội tụ theo dung lượng tới f trên W_f.*

Để kết thúc chương này ta sẽ đưa ra một số ví dụ của dãy chấp nhận được thỏa mãn các giả thiết của Định lý 4.2.1.

Mệnh đề 4.2.7. *Cho $\{h_m\}_{m\geq 1}$ là dãy các hàm trơn giá trị thực lớp $\mathcal{C}^1$ xác định trên $(0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(a) h_m là dãy tăng;

(b) $0 < h_m(t) \leq \frac{1}{2m}$ $\forall m \geq 1, \forall t > 0$.

Khi đó, dãy $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$ *xác định bởi*

$$\chi_m(t) := e^{\int_1^t \frac{h_m(x)}{x}dx}, t > 0,$$

là chấp nhận được và thỏa mãn điều kiện được cho trong Định lý 4.2.1 (c).

Nhận xét. Bằng cách chọn $h_m \equiv \frac{1}{2m}$ ta có dãy chấp nhận được $\chi_m(t) = t^{\frac{1}{2m}}$ (với $\tilde{\chi}_m = \chi_m$).

Chứng minh. Cố định $m \geq 1$. Khi đó $\chi_m \in \mathcal{C}^2(0,\infty)$ và $h_m(t) = \frac{t\chi_m'(t)}{\chi_m(t)}$. Theo tính toán cho trong Bổ đề 4.1.2 (b) và giả thiết (a) ta thấy χ_m thỏa mãn (1.2). Hơn nữa ta suy ra từ (b) đánh giá sau:

$$0 \leq \int_1^t \frac{h_m(x)}{x}dx \leq \frac{\log t}{2m} \text{ trên } [1,\infty).$$

như vậy

$$0 < \int_t^1 \frac{h_m(x)}{x}dx \leq -\frac{\log t}{2m} \text{ trên } (0,1).$$

Điều này dẫn đến

$$1 \leq \chi_m(t) \leq t^{\frac{1}{2m}} \text{ trên } [1,\infty),$$

và

$$t^{\frac{1}{2m}} \leq \chi_m(t) < 1 \text{ trên } (0,1).$$

Hơn nữa ta có

$$\lim_{t\to 0}\chi_m(t) = e^{-\int_0^1 \frac{h_m(x)}{x}dx} := \chi_m(0).$$

Vì vậy dãy $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$ thỏa mãn các điều kiện (1.1), (1.2). Tiếp theo, ta đặt

$$\tilde{\chi}_m(t) := t^{\frac{1}{2m}},\ \forall m \geq 1.$$

Bởi đánh giá trên ta có thể suy ra (1.3). Cuối cùng, dãy $\{\tilde{\chi}_m\}_{m\geq 1}$ thỏa mãn điều kiện được cho trong Định lý 4.2.1 (c). $\square$

Kết luận và kiến nghị

I. Kết luận

Luận án nghiên cứu hội tụ của các hàm hữu tỷ và ứng dụng và đã đạt được những kết chính sau đây:

1. Chứng minh một dạng cho định lý hội tụ Vitali cho dãy các hàm hữu tỷ với một điều kiện về cực điểm của dãy hàm hữu tỷ này (Định lý 2.2.4).

2. Chứng minh một dạng mở rộng định lý của Bloom (Định lý 2.2.6) khi sự hội tụ của dãy hàm hữu tỷ được xét trên biên của một miền bị chặn cho trước.

3. Đưa ra ví dụ trong hoàn cảnh mà Định lý 2.2.6 có thể áp dụng được.

4. Định lý 3.2.2 đã đưa ra một điều kiện trên tập A trong $\mathbb{C}^n$ sao cho với bất kỳ dãy về chuỗi lũy thừa hình thức $\{f_m\}_{m\geq 1}$ với $\{f_m|_{l_a}\}_{m\geq 1}(a \in A)$ là một dãy hội tụ của các hàm chỉnh hình được định nghĩa trên một đĩa có bán kính r_0 với tâm tại $0 \in \mathbb{C}$ sẽ biểu diễn một dãy hội tụ của các hàm chỉnh hình trên một hình cầu (có thể nhỏ hơn) có bán kính r_1.

5. Định lý 4.2.1 là tổng quát hóa Định lý 2.1 trong [5] ở đó sự hội tụ nhanh được thay thế bởi sự hội tụ điểm đối với một dãy trọng chấp nhận được.

II. Kiến nghị

Từ những kết quả thu được của luận án trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi đề xuất một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo như sau:

1. Trong Định lý 3.2.2 chúng tôi không biết sự hội tụ đều của họ $\{f_m|_{l_a}\}_{m\geq 1}$ trên các tập compact của $\Delta(0, r_0)$ có thể được thay bởi *tính chuẩn tắc* của họ này trên $\Delta(0, r_0)$ hay không?

2. Giả thiết về phân bố cực điểm (ii) trong Định lý 2.2.4 là khá chặt. Chúng tôi muốn tìm ví dụ để thấy điều kiện này là cần thiết hoặc chứng minh Định lý 2.2.4 mà không có điều kiện này.

3. Khái niệm hội tụ theo một dãy trọng chấp nhận được có thể áp dụng cho các hàm không nhất thiết là chỉnh hình hoặc là hàm hữu tỷ. Liệu ta có thể có các định lý tương tự như Định lý 4.2.1 cho dãy những hàm đa điều hòa hay thậm chí hàm khả vi hay không?

Câu trả lời còn đòi hỏi chúng tôi tiếp tục nghiên cứu. Cuối cùng, chúng tôi cũng xin trân trọng tiếp thu và thảo luận những hướng nghiên cứu mới liên quan tới đề tài luận án.

Danh mục các công trình sử dụng trong luận án

[1] N.Q. Dieu, P.V. Manh, P.H. Bang and L.T. Hung (2016), "Vitali's theorem without uniform boundedness", *Publ. Mat.* **60**, 311-334.

[2] T.V. Long, L.T. Hung (2017), " Sequences of formal power series", *J. Math. Anal. Appl.* **452**, 218-225.

[3] D.H. Hung, L.T. Hung (2017), "Convergence of sequences of rational functions on $\mathbb{C}^n$", *Vietnam J. Math.* **45**, 669-679.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Toán giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2017;
- Hội thảo nghiên cứu khoa học và đào tạo Nghiên cứu sinh, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2017;
- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ 9 tại Nha Trang, 2018.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt:

[1] Nguyễn Quang Diệu, Lê Mậu Hải (2009), *Cơ sở lý thuyết đa thế vị*, Nxb ĐHSP, Hà Nội.

Tiếng Anh:

[2] H. Alexander (1974), "Volume of varieties in projective and Grassmanian spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.* **189**, 237-249.

[3] S. Benelkourchi, B. Jenanne and A. Zeriahi (2005), "Polya's inequalities, global uniform integrability and the size of plurisubharmonic lemniscates", *Ark. Mat.*, **43**, 85-112.

[4] Z. Blocki, *Lecture notes in pluripotential theory*, preprint, http://gamma.im.uj.edu.pl/ blocki /publ/ln/wykl.pdf.

[5] T. Bloom (2001), "On the convergence in capacity of rational approximants", *Constr. Approx.* **17**, 91-102.

[6] E. Chirka (1976), "Meromorphic continuation and the degree of rational approximations in $\mathbb{C}^n$", *Math. USSR Sbornik* **28**, 553-561.

[7] P. Colwell (1966), "On the boundary behavior of Blaschke products in the unit disk", *Proc. Amer. Math. Soc.* **17**, 582-587.

[8] K. Davidson (1983), "Pointwise limits of analytic functions", *Amer. Math. Monthly* **90**, 391-394.

[9] A. Gonchar (1974), "A local condition for the single valuedness of analytic functions of several - variables", *Math. USSR Sbornik* **22**, 305-322.

[10] F. Forelli (1977), "Pluriharmonicity in terms of harmonic slices", *Math. Scand.* **41**, 358-364.

[11] F. Hartogs (1906), "Zur Theorie der analytischen Funktionen mehreren unabhangiger Veranderlichen", *Math. Ann.* **62**, 1-88.

[12] L. Hömander (1993), *Notations of Convexity*, Birkhäuser Press.

[13] M. Klimek (1991), *Pluripotential Theory*, Oxford Science Publications, Oxford New York Tokyo.

[14] N. Levenberg and R. Molzon (1988), "Convergent sets of a formal power series", *Math. Z.* **197**, 411-420.

[15] N. Levenberg (2006), "Approximation in C^n", *S. in Approximation Theory* **2**, 92-140.

[16] D. Ma and T. Neelon, *On convergence sets of formal power series*, Complex Analysis and its Synergies (2015) 1:4, https://doi.org/10.1186/s40627-015-0004-4.

[17] R. Narasimhan (1971), *Several Complex Variables*, University of Chicago Press, Chicago.

[18] A. Sadullaev (1981), "Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds", *Uspekhi Mat. Nauk.* **36**, 53-105.

[19] A. Sadullaev (1986), "A criterion for rapid rational approximation", *Math. USSR. Sbornik* **53**, 271-281.

[20] A. Sathaye (1976), " Convergence sets of divergent power series", *J. Reine. Angew. Math.* **283**, 86-98.

[21] J. Siciak (1981), "Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^n$", *Ann. Pol. Math.* **39**, 175-211.

[22] Vitali (1904), "Sopra le serie di funzioni analitiche", *Ann. Mat. Pura Appl.* **10**, 65-82.