BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

TRẦN VĂN THỦY

TÍNH LIÊN TỤC HOLDER VÀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPERE

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - Năm 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

TRẦN VĂN THỦY

TÍNH LIÊN TỤC HOLDER VÀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPERE

Chuyên ngành: Toán Giải Tích

Mã số: 9.46.01.02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. Nguyễn Văn Trào

Hà Nội - Năm 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan Luận án này được thực hiện bởi chính tác giả tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Trào; đề tài của Luận án là mới, các kết quả của Luận án hoàn toàn mới và các công trình được sử dụng trong Luận án chưa từng được công bố trước đó.

Nghiên cứu sinh

Trần Văn Thủy

Lời cảm ơn

Tôi cảm thấy thật may mắn khi được học dưới mái trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Trào. Bằng tất cả lòng kính trọng của mình, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy đã tận tâm dạy bảo, dùi dắt tôi trên con đường học tập và nghiên cứu. Đặc biệt là trong quá trình học nghiên cứu sinh.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Xuân Hồng, Thầy đã góp ý, chỉ bảo và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập, đặc biệt là giai đoạn học nghiên cứu sinh để có thể hoàn thành Luận án này.

Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới tất cả các Thầy Cô trong khoa Toán - Tin, trong tổ Lý Thuyết Hàm, cũng như các thành viên trong nhóm Seminar Giải tích phức - trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội. Đặc biệt là GS. TSKH. Lê Mậu Hải và GS. TS. Nguyễn Quang Diệu bởi những trao đổi và những lời góp ý vô cùng quý báu của các Thầy.

Hà Nội, tháng 9 năm 2018

NCS. Trần Văn Thủy

Mục lục

Kí hiệu

- $\mathcal{C}(\Omega)$: Tập hợp các hàm liên tục trên Ω
- $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$: Tập hợp các hàm trơn vô hạn trên Ω
- $\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$: Tập hợp các hàm trơn vô hạn có giá compact trên Ω
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$: Tập hợp các hàm liên tục α-Hölder trên Ω
- $L^{\infty}(\Omega)$: Không gian các hàm đo được Lebesgue, bị chặn h.k.n trên Ω
- $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: Không gian các hàm đo được Lebesgue, bị chặn địa phương h.k.n trên Ω
- $L^p(\Omega)$: Không gian các hàm khả tích bậc p trên Ω
- $L^p_{loc}(\Omega)$: Không gian các hàm khả tích địa phương bậc p trên Ω
- $\mathcal{PSH}(\Omega)$: Tập hợp các hàm đa điều hòa dưới trên Ω
- $\mathcal{PSH}^-(\Omega)$: Tập hợp các hàm đa điều hòa dưới âm trên Ω
- $\mathcal{MPSH}(\Omega)$: Tập hợp các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên Ω
- $(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u$: Toán tử Monge-Ampère của u
- $MA\,(\Omega, \phi, f)$: Bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère
- $u\,(\Omega, \phi, f)$: Nghiệm của bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$
- $u_j \nearrow u$: Dãy $\{u_j\}$ hội tụ tăng tới u
- $u_j \searrow u$: Dãy $\{u_j\}$ hội tụ giảm tới u
- $u_j \to u$: Dãy $\{u_j\}$ hội tụ tới u
- $C_n(U, \Omega)$: Dung lượng tương đối của tập $U \subset \Omega$
- $A \lesssim B$: Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho $A \leq CB$

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Toán tử Monge-Ampère phức là đối tượng đóng vai trò trung tâm của lý thuyết đa thế vị, một hướng nghiên cứu đang thu hút nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm, hướng này đã phát triển mạnh mẽ và gặt hái được nhiều thành tựu trong hai thập niên qua bởi một số nhà toán học như: P. Åhag, E. Bedford, Z. Błocki, U. Cegrell, L.H. Chinh, R. Czyż, J.P. Demailly, V. Guedj, L.M. Hải, P.H. Hiệp, N.X. Hồng, T.V. Khanh, N.V. Khuê, S. Kołodziej, B.A. Taylor, Y. Xing, A. Zeriahi,..., xem [1-42].

Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng đối với toán tử Monge-Ampère phức đó là bài toán Dirichlet $MA(\Omega, \phi, f)$. Từ năm 1976 đến 2016, các tác giả đã gặt hái được nhiều kết quả quan trọng đối với bài toán này, với trường hợp từ Ω là miền giả lồi chặt, bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{C}^n$ tới Ω là miền giả lồi bị chặn với biên lớp C^2, đa điều hòa dưới loại m. Như vậy, bài toán $MA(\Omega, \phi, f)$ đối với miền giả lồi không trơn đa điều hòa dưới loại m vẫn là một vấn đề mở.

Tiếp theo, cho một dãy các hàm đa điều hòa dưới $\{u_j\}$, ta quan tâm đến sự hội tụ theo C_p-dung lượng với $p = \{n-1, n\}$, sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère phức tương ứng $\{(dd^c u_j)^n\}$, cũng như mối liên hệ giữa chúng. Đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về vấn đề này như: [14], [32], [41], [42]. Cụ thể, các tác giả đã chỉ ra rằng dưới những điều kiện nhất định thì sự hội tụ theo C_p-dung lượng với $p = \{n-1, n\}$ của dãy hàm $\{u_j\}$ sẽ đảm bảo sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère phức tương ứng $\{(dd^c u_j)^n\}$ và ngược lại. Tuy nhiên, việc nghiên cứu một số điều kiện đủ để có được sự tương đương giữa sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy hàm $\{u_j\}$ và sự hội tụ yếu của dãy toán tử Monge-Ampère phức tương ứng, cũng như dựa trên cơ sở đó để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức vẫn là một vấn đề mở.

Tiếp tục hướng nghiên cứu này, chúng tôi quan tâm tới vấn đề thác triển dưới của hàm đa điều hòa dưới u tới miền lớn hơn, đặc biệt là các hàm thác triển dưới cực đại. Theo suốt hướng này, các tác giả đã quan tâm tới vấn đề khi nào thì tồn tại thác triển dưới, thác triển dưới cực đại của u, cũng như nghiên cứu nhiều tính chất của chúng, như độ đo Monge-Ampère phức của hàm thác triển dưới, thác triển dưới cực đại. Như vậy, vấn đề sự hội tụ theo C_n-dung lượng của các hàm thác triển dưới cực đại vẫn là một bài toán mở.

Từ những vấn đề nêu trên, chúng tôi chọn hướng nghiên cứu này với đề tài luận án là *"Tính liên tục Holder và sự ổn định của nghiệm phương trình Monge-Ampere"*.

2. Mục đích nghiên cứu

Từ những thành tựu đã đạt được gần đây, mục đích của Luận án là:

- Nghiên cứu bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức trên miền giả lồi không trơn, đa điều hòa dưới loại m.
- Tìm ra các điều kiện đủ đối với dãy hàm $\{u_j\} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$ để có được sự tương đương giữa sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy hàm $\{u_j\}$ và sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère phức tương ứng.

- Nghiên cứu tính ổn định nghiệm phương trình Monge-Ampère phức.
- Nghiên cứu sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy hàm thác triển dưới cực đại.
- Tiếp tục nghiên cứu tìm hiểu, để tìm ra những vấn đề nghiên cứu mới.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Hàm đa điều hòa dưới, thác triển dưới cực đại của hàm đa điều hòa dưới.
- Các lớp hàm đa điều hòa dưới được U. Cegrell giới thiệu, nghiên cứu và được phát triển bởi nhiều tác giả.
- Toán tử Monge-Ampère phức.
- Bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức.
- Phương trình Monge-Ampère phức và nghiệm của chúng trên các lớp hàm Cegrell.
- Các tính chất về sự hội tụ theo C_n-dung lượng của các hàm đa điều hòa dưới và các hàm thác triển dưới cực đại của các hàm đa điều hòa dưới.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Ứng dụng các phương pháp và kỹ thuật truyền thống đã được các nhà toán học sử dụng, nghiên cứu trong Giải tích phức.
- Tham gia seminar nhóm, seminar Tổ bộ môn để thường xuyên trao đổi, thảo luận, nghiên cứu những vấn đề đang vướng mắc, cũng như những vấn đề mới.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của Luận án

Lý thuyết đa thế vị là một trong những hướng nghiên cứu đang được nhiều tác giả quan tâm bởi những ứng dụng của chúng trong giải tích phức nhiều biến, hình học vi phân phức, phương trình đạo hàm riêng phức, động lực học phức, giải tích hyperbolic,... Kết quả của Luận án góp phần nghiên cứu hoàn thiện lý thuyết đa thế vị, cũng như các kỹ thuật trong hướng nghiên cứu này.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài các phần: Mục lục, Mở đầu, Tổng quan các vấn đề nghiên cứu, Kết luận và kiến nghị, Danh mục các công trình sử dụng trong Luận án, Tài liệu tham khảo, nội dung chính của Luận án bao gồm ba chương:

- *Chương 1. Tính liên tục Hölder của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức*

  Trong phần đầu, ta nghiên cứu một số tính chất cơ bản cần thiết cho việc trình bày nội dung Luận án. Sau đó, ta tập trung nghiên cứu một trong những kết quả chính của Luận án về bài toán Dirichlet cho toán tử Monge-Ampère phức trên các miền giả lồi không trơn.

- *Chương 2. Sự ổn định của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức*

  Phần đầu của chương, ta nghiên cứu mối liên hệ giữa sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy các hàm đa điều hòa dưới và sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère phức tương ứng. Sau đó, ta sử dụng kết quả đó để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức.

- *Chương 3. Thác triển dưới cực đại của hàm đa điều hòa dưới*

  Trong chương này, ta sẽ ứng dụng các kết quả của chương trước về tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức để nghiên cứu các tính chất của hàm đa điều hòa dưới. Cụ thể, ta đưa ra khái niệm về hàm thác triển dưới cực đại của một hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên. Sau đó, ta nghiên cứu một số tính chất của lớp hàm này, cũng như toán tử Monge-Ampère của chúng. Phần cuối, ta tập trung trình bày kết quả chính của chương về sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy hàm thác triển dưới cực đại với giá trị biên.

Tổng quan các vấn đề nghiên cứu

1. Tính liên tục Hölder của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức trong miền giả lồi không trơn

Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một tập mở với $n \geq 1$. Một hàm nửa liên tục trên $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là đa điều hòa dưới trên Ω nếu với mỗi đường thẳng phức l trong $\mathbb{C}^n$, $u|_{l\cap\Omega}$ là điều hòa dưới trên $l \cap \Omega$. Ta kí hiệu $\mathcal{PSH}(\Omega)$ là họ các hàm đa điều hòa dưới được định nghĩa trên Ω, $\mathcal{PSH}^-(\Omega)$ là họ các hàm đa điều hòa dưới âm trên Ω và $\mathcal{MPSH}(\Omega)$ là tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên Ω. Ta ký hiệu $(dd^c.)^n$ là toán tử Monge-Ampère phức, ở đó $d = \partial + \overline{\partial}$ và $d^c = i\left(\overline{\partial} - \partial\right)$, do đó $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$. Năm 2004, U. Cegrell [12] đã chỉ ra một lớp các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn trên miền siêu lồi bị chặn mà toán tử Monge-Ampère phức có thể được định nghĩa.

Ta xét bài toán Dirichlet cho phương trình Monge-Ampère phức:

$$MA(\Omega, \phi, f) : \begin{cases} u \in \mathcal{PSH}\left(\Omega\right) \cap L^{\infty}(\Omega) \\ \left(dd^c u\right)^n = f dV_n \quad \text{trong } \Omega \\ \lim\limits_{z\to\xi} u\left(z\right) = \phi\left(\xi\right),\ \forall \xi \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Ở đó, f là hàm không âm trên Ω, $f \in L^p(\Omega)$ với $p > 1$ và hàm ϕ liên tục và bị chặn trên biên của Ω. Với dạng thể tích $dV_n = \frac{1}{n!}\beta^n$, $\beta = dd^c\|z\|^2$ là dạng Kähler chính tắc của $\mathbb{C}^n$. Ta ký hiệu $u\left(\Omega, \phi, f\right)$ là nghiệm của bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$.

Trong lý thuyết đa thế vị, bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f))$ là một vấn đề quan trọng được nhiều tác giả quan tâm. Các hướng được quan tâm là việc giải bài toán, chứng minh sự tồn tại nghiệm và nghiên cứu các tính chất nghiệm của nó (như tính duy nhất, tính liên tục, tính trơn, tính liên tục Hölder,...) trên mỗi miền Ω cụ thể (như miền siêu lồi, miền giả lồi, miền giả lồi chặt, miền bị chặn, miền không bị chặn, miền có biên trơn, miền có biên không trơn, miền giả lồi đa điều hòa dưới loại m,...). Ta điểm lại dưới đây một số kết quả nổi bật theo hướng nghiên cứu này.

Khi Ω là miền giả lồi chặt, bị chặn với biên trơn trong $\mathbb{C}^n$, E. Bedford và B.A. Taylor [3] đã chỉ ra rằng $MA\,(\Omega, \phi, f)$ có một nghiệm duy nhất $u(\Omega, \phi, f) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ nếu $\phi \in C^{0,2\alpha}(\partial\Omega)$ và $f^{\frac{1}{n}} \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ với $0 < \alpha \leq 1$. Tiếp theo, năm 1982 E. Bedford và B.A. Taylor [4] tiếp tục chỉ ra rằng bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$ luôn tồn tại nghiệm $u\,(\Omega, \phi, f)$ liên tục trên $\overline{\Omega}$, nếu hàm f liên tục trên $\overline{\Omega}$. Năm 1985, các tác giả L. Caffarelli, J.J. Kohn, L. Nirenberg và J. Spruck [10] đã nghiên cứu tính chính quy toàn thể đối với bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$. Họ đã chỉ ra rằng, nếu f là hàm dương, $f \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ và $\phi \in C^{\infty}\left(\partial\Omega\right)$ thì $MA\,(\Omega, \phi, f)$ sẽ có duy nhất nghiệm đa điều hòa dưới $u \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Khi Ω là miền giả lồi không trơn thì bài toán trở nên phức tạp hơn nhiều. Năm 1996, Z. Błocki [7] đã chỉ ra một đặc trưng cho sự tồn tại của nghiệm đa điều hòa dưới liên tục trên các miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$. Trong khi đó, S. Kołodziej [36] đã chứng minh sự tồn tại duy nhất và liên tục của nghiệm bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$ trên các miền giả lồi chặt. Năm 2004, S.Y. Li [38] lại quan tâm tới việc nghiên cứu bài toán trên miền giả lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên lớp C^2. Ông đã chứng minh rằng nếu Ω là miền giả lồi bị chặn, đa điều hòa dưới loại m với biên lớp C^2, $\phi \in C^{0,m\alpha}(\partial\Omega)$ với $0 < \alpha \leqslant \frac{2}{m}$ và $f^{\frac{1}{n}} \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ thì $MA(\Omega, \phi, f)$ có nghiệm duy nhất $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Năm 2008, V. Guedj, S. Kołodziej và A. Zeriahi [26] đã nghiên cứu bài toán trên các miền giả lồi mạnh bị chặn. Họ đã chỉ ra rằng nếu $\phi \in C^{1,1}(\partial\Omega)$ và $f \in L^p(\Omega)$ với $p > 1$ thì nghiệm duy nhất $u(\Omega, \phi, f)$ cũng liên tục α-Hölder trên $\overline{\Omega}$, với mọi $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{1 + \frac{np}{p-1}}$. Năm 2015, M. Charabati [21] tiếp tục nghiên cứu tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán trên miền Lipschitz siêu lồi mạnh bị chặn. Gần đây, L. Baracco, T.V. Khanh, S. Pinton và G. Zampieri [2] đã tổng quát kết quả của [26] tới miền giả lồi bị chặn, trơn lớp C^2, đa điều hòa dưới loại m, dưới giả thiết rằng dữ kiện biên $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ với $0 < \alpha \leqslant 2$. Vấn đề đầu tiên mà Luận án quan tâm nghiên cứu là đưa ra một kết quả tổng quát cho Định lý của [2] cho các miền giả lồi không trơn, đa điều hòa dưới loại m (không nhất thiết bị chặn).

2. Sự ổn định của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức

Khái niệm C_n-dung lượng (hay dung lượng tương đối) của các tập Borel được hai tác giả E. Bedford và B.A. Taylor [4] giới thiệu và nghiên cứu đầu tiên từ 1982. Xoay quanh hướng nghiên cứu liên quan tới sự hội tụ theo dung lượng của một dãy các hàm đa điều hòa dưới được rất nhiều tác giả quan tâm và gặt hái được nhiều kết quả quan trọng. Ta nhắc lại dưới đây một số kết quả nổi bật.

Năm 1996, Y. Xing [41] đã chứng minh rằng toán tử Monge-Ampère phức là liên tục dưới sự hội tụ theo C_n-dung lượng của một dãy các hàm đa điều hòa dưới bị chặn. Cụ thể, ông cũng đã đưa ra một điều kiện đủ để đảm bảo sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère phức tương ứng của dãy các hàm đa điều hòa dưới bị chặn. Sau đó, năm 2008, Y. Xing [42] đặc biệt quan tâm tới bài toán: Nếu ta có được sự hội tụ theo độ đo Monge-Ampère $(dd^c u_j)^n$ thì ta có suy ra được sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy hàm $\{u_j\}$ không. Câu trả lời là không, bởi vì ta biết rằng sự hội tụ yếu của dãy độ đo $\{(dd^c u_j)^n\}$ tới $(dd^c u)^n$ trong trường hợp tổng quát không suy ra được sự hội tụ yếu của dãy hàm $\{u_j\}$ tới u, ngay cả trong trường hợp tất cả các hàm u_j trùng với u trên biên của Ω. Từ đó ông đã đưa ra một số kết quả quan trọng về mối liên hệ giữa sự hội tụ yếu của độ đo $(dd^c u_j)^n$ tới $(dd^c u)^n$ và sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy hàm $\{u_j\}$ tới u. Hơn nữa, ông cũng đã chứng minh sự hội tụ yếu của độ đo Monge-Ampère là tương đương với sự hội tụ theo C_{n-1}-dung lượng của các hàm trong một số trường hợp và nghiên cứu sự hội tụ theo C_n-dung lượng của các hàm thuộc lớp hàm $\mathcal{F}^a(\Omega)$.

Năm 2010, P.H. Hiệp [32] đã nghiên cứu sự hội tụ theo C_n-dung lượng của các hàm thuộc lớp hàm $\mathcal{E}(\Omega)$. Cụ thể hơn, tác giả đã làm rõ rằng nếu $u_j, v_j, w \in \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $u_j, v_j \geq w,\ \forall j \geq 1$ và $|u_j - v_j| \longrightarrow 0$ theo C_n-dung lượng, thì

$$\lim_{j\to+\infty} h\left(\varphi_1, ..., \varphi_m\right)\left[(\mathrm{dd}^c u_j)^n - (\mathrm{dd}^c v_j)^n\right] = 0$$

theo topo yếu của các độ đo, $\forall\, \varphi_1, ..., \varphi_m \in PSH \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. Gần đây, năm 2012 U. Cegrell [14] đã chứng minh rằng nếu một dãy các hàm đa điều hòa dưới bị chặn dưới bởi một hàm thuộc lớp Cegrell $\mathcal{E}(\Omega)$ và hội tụ theo C_{n-1}-dung lượng thì các độ đo Monge-Ampère tương ứng cũng hội tụ theo topo yếu.

Hơn nữa, ta đã biết rằng sự hội tụ theo phân bố của các hàm đa điều hòa dưới trong trường hợp tổng quát không suy ra được sự hội tụ của các độ đo Monge-Ampère tương ứng. Vì vậy, việc tìm ra các điều kiện đủ để từ sự hội tụ theo nghĩa nào đó của dãy hàm đa điều hòa dưới kéo theo sự hội tụ theo topo yếu của dãy độ đo Monge-Ampère phức tương ứng có ý nghĩa rất lớn. Bài toán đặt ra là ta có thể nghiên cứu một số điều kiện đủ để có được sự tương đương giữa sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy hàm $\{u_j\}$ và sự hội tụ yếu của dãy toán tử Monge-Ampère phức tương ứng hay không. Đây chính là một trong những vấn đề mà luận án quan tâm nghiên cứu.

Trên cơ sở đó, ta sẽ sử dụng các kết quả đã đạt được để nghiên cứu tính ổn định của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức. Cụ thể, luận án đưa ra một kết quả tổng quát cho định lý ổn định của U. Cegrell và S. Kołodziej trong [16].

3. Thác triển dưới cực đại của hàm đa điều hòa dưới

Tiếp tục mở rộng theo hướng nghiên cứu trên, ta quan tâm tới vấn đề thác triển dưới của các hàm đa điều hòa dưới, một hướng mang nhiều ý nghĩa quan trọng của lý thuyết đa thế vị trong việc nghiên cứu tính chất của hàm đa điều hòa dưới, toán tử Monge-Ampère phức, bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức,... Hướng này đã thu hút sự quan tâm của một số tác giả khá sớm, kết quả đầu tiên theo hướng này là Định lý của H. El Mir [39]. Ông đã đưa ra một ví dụ về một hàm đa điều hòa dưới trên song đĩa đơn vị mà sự hạn chế của nó trên bất kỳ song đĩa nhỏ hơn sẽ không tồn tại thác triển dưới, đa điều hòa dưới trên toàn bộ không gian. Sau đó, năm 1988, E. Bedford và B. A. Taylor [5] đã chứng minh rằng với bất kỳ miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{C}^n$ luôn tồn tại một hàm đa điều hòa dưới trơn mà không chấp nhận thác triển dưới tới miền lớn hơn.

Như vậy, khi nghiên cứu bài toán thác triển dưới của các hàm đa điều hòa dưới, các tác giả luôn quan tâm đến các điều kiện để đảm bảo tồn tại hàm thác triển dưới. Kết quả đầu tiên về vấn đề thác triển dưới trong các lớp Cegrell thuộc về U. Cegrell và A. Zeriahi [19]. Họ đã chỉ ra rằng nếu $\Omega \Subset \widetilde{\Omega} \Subset \mathbb{C}^n$ là các miền siêu lồi và $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$, thì φ sẽ tồn tại một hàm thác triển dưới $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega})$ mà $\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{\varphi})^n \leq \int\limits_{\Omega} (dd^c\varphi)^n$. Trong vấn đề thác triển dưới cực đại của các hàm đa điều hòa dưới, các kết quả đầu tiên thuộc về U. Cegrell, S. Kołodziej và A. Zeriahi [18] trong năm 2011. Họ đã giới thiệu khái niệm thác triển dưới cực đại của các hàm đa điều hòa dưới và nghiên cứu nó trong lớp Cegrell $\mathcal{F}(\Omega)$. Gần đây, N.X. Hồng [33] đã chứng minh một kết quả về độ đo Monge-Ampère phức của thác triển dưới cực đại của các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên.

Dựa trên sự hội tụ theo dung lượng là một trong các kỹ thuật quan trọng trong việc nghiên cứu toán tử Monge-Ampère phức. Đặc biệt, là việc giải phương trình Monge-Ampère phức. Trong vấn đề thứ ba này, luận án sẽ ứng dụng kết quả của chương 2 về tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức để nghiên cứu sự hội tụ theo dung lượng của dãy các hàm thác triển dưới cực đại của các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên.

Chương 1

Tính liên tục Hölder của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$ trên các miền giả lồi không trơn, đa điều hòa dưới loại m, cũng như nghiên cứu các tính chất nghiệm của chúng.

1.1 Sự tồn tại nghiệm của bài toán Dirichlet

Ta nhắc lại khái niệm về miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ sẽ cần dùng trong luận án.

Định nghĩa 1.1.1. Một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là siêu lồi nếu tồn tại một hàm đa điều hòa dưới bị chặn ρ sao cho $\{z \in \Omega : \rho(z) < c\} \Subset \Omega$, với mỗi $c \in (-\infty, 0)$.

Bây giờ, ta đưa ra định nghĩa tổng quát về miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại m (không nhất thiết bị chặn, xem thêm [2], [38]).

Định nghĩa 1.1.2. Cho $m > 0$ và Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$. Ta nói rằng Ω là đa điều hòa dưới loại m nếu tồn tại một hàm bị chặn $\rho \in C^{0,\frac{2}{m}}\left(\overline{\Omega}\right)$

sao cho $\{\rho < -\varepsilon\} \Subset \Omega, \forall \varepsilon > 0$ và $\rho(z) - |z|^2$ là đa điều hòa dưới trong Ω.

Ta biết rằng với mỗi miền giả lồi chặt bị chặn, trơn trong $\mathbb{C}^n$ là miền đa điều hòa dưới loại *2* (*xem* [38]).

Song song với việc chứng minh sự tồn tại nghiệm bài toán $MA(\Omega, \phi, f)$ là việc nghiên cứu tính chất nghiệm của nó, đặc biệt là tính liên tục Hölder của $u(\Omega, \phi, f)$. Ta có mệnh đề về đặc trưng của lớp hàm liên tục Hölder như sau.

Mệnh đề 1.1.3. *Cho S là một tập con của $\mathbb{C}^n$ và $\varphi : S \to \mathbb{R}$. Giả sử $\alpha > 0$. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương.*

(a) φ là liên tục α-Hölder và bị chặn trên S, nghĩa là

$$\sup_{\xi \in S} |\varphi(\xi)| + \sup_{\xi,\zeta \in S,\ \xi \neq \zeta} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)|}{|\xi - \zeta|^\alpha} < +\infty.$$

(b) Tồn tại $N, \delta_0 > 0$ sao cho $|\varphi(\xi)| \leq N$, $\forall \xi \in S$ và

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)| \leq N\delta^\alpha,\ \forall \delta \in (0, \delta_0),\ \forall \xi, \zeta \in S,\ |\xi - \zeta| \leq \delta.$$

Tập tất cả các hàm liên tục α-Hölder trên S được ký hiệu bởi $\mathcal{C}^{0,\alpha}(S)$.

Chứng minh. (a) $\Rightarrow$ (b) là rõ ràng. Ta chứng minh (b) $\Rightarrow$ (a). Đặt

$$M := N + 2\delta_0^{-\alpha} \sup_{z \in S} |\varphi(z)|.$$

Với mọi $\xi, \zeta \in S$. Nếu $|\xi - \zeta| < \delta_0$ thì

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)| \leq N|\xi - \zeta|^\alpha \leq M|\xi - \zeta|^\alpha.$$

Bây giờ ta giả sử $|\xi - \zeta| \geq \delta_0$. Ta có

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)| \leq 2\sup_{z \in S} |\varphi(z)| \leq M\delta_0^\alpha \leq M|\xi - \zeta|^\alpha.$$

Vì vậy, $|\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)| \leq M|\xi - \zeta|^\alpha$ với mọi $\xi, \zeta \in S$. $\square$

Tiếp theo, ta có mệnh đề về tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán $MA(\Omega, \phi, 0)$.

Mệnh đề 1.1.4. *Cho $m > 0$ và Ω là một miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại m. Cho ρ như trong Định nghĩa 1.1.2 và $\phi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$. Ta đặt*

$$M := \sup_{\xi\in\partial\Omega} |\phi(\xi)| + \sup_{\xi,\zeta\in\partial\Omega,\xi\neq\zeta} \frac{|\phi(\xi) - \phi(\zeta)|}{|\xi-\zeta|^\alpha}$$

và

$$u = u(\Omega, \phi, 0) := \sup\{\varphi \in \mathcal{PSH}(\Omega) : \varphi \le \min(\phi(\xi) - h_\xi, M), \forall \xi \in \partial\Omega\},$$

ở đó

$$h_\xi(z) := -4M\left[-\rho(z) + |z-\xi|^2\right]^{\frac{\alpha}{2}},\ z \in \overline{\Omega}, \xi \in \partial\Omega.$$

Khi đó, u là một nghiệm bị chặn của bài toán $MA(\Omega, \phi, 0)$. Hơn nữa, $u \in \mathcal{C}^{0,\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)}(\overline{\Omega})$.

Chứng minh. Ta sử dụng kĩ thuật của S.Y. Li [38] (xem thêm [2]). Từ giả thiết ta có $h_\xi \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $\forall \xi \in \partial\Omega$. Cố định $\zeta, \xi \in \partial\Omega$ và $z \in \overline{\Omega}$. Bởi $\rho \le 0$ trong $\overline{\Omega}$, $\phi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ và $0 < \alpha \le 1$, từ định nghĩa của h_ζ và h_ξ, ta có

$$\begin{aligned}
\phi(\zeta) + h_\zeta(z) &\le \phi(\xi) + M|\zeta-\xi|^\alpha + h_\zeta(z)\\
&\le \phi(\xi) + M[|z-\zeta| + |z-\xi|]^\alpha - 4M|z-\zeta|^\alpha\\
&\le \phi(\xi) + 4M|z-\xi|^\alpha\\
&\le \phi(\xi) - h_\xi(z).
\end{aligned}$$

Từ đó,

$$\phi(\zeta) + h_\zeta \le \phi(\xi) - h_\xi \text{ trong } \Omega, \forall \zeta, \xi \in \partial\Omega.$$

Vì vậy, $-M \le u \le M$ và

$$\sup_{\xi\in\partial\Omega} [\phi(\xi) + h_\xi] \le u \le \inf_{\xi\in\partial\Omega} [\phi(\xi) - h_\xi] \text{ trên } \overline{\Omega}. \tag{1.1}$$

Điều này suy ra

$$\lim_{z\to\xi} u(z) = \phi(\xi),\ \forall \xi \in \partial\Omega.$$

Ta cần chứng minh u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trong Ω. Thật vậy, cho $G \Subset \Omega$ là một tập mở và $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ với $v \leq u$ trên $\Omega\backslash G$. Cho $\xi \in \partial\Omega$. Từ $h_\xi \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ ta có $k_\xi(z) := -\min(\phi(\xi) - h_\xi(z), M) \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. Bởi (1.1) và sử dụng nguyên lý cực đại,

$$\sup_{\Omega}\,[v + k_\xi] = \sup_{\Omega\backslash G}\,[v + k_\xi] \leq \sup_{\Omega\backslash G}\,[u + k_\xi] \leq 0.$$

Vì vậy,

$$v \leq -k_\xi = \min(\phi(\xi) - h_\xi, M) \text{ trong } \Omega,$$

với mỗi $\xi \in \partial\Omega$. Từ định nghĩa của u ta suy ra $v \leq u$ trong Ω. Vậy, u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trong Ω. Hơn nữa, u là nghiệm bị chặn của bài toán $MA(\Omega, \phi, 0)$.

Phần còn lại ta cần chỉ ra $u \in \mathcal{C}^{0,\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)}(\overline{\Omega})$. Cho $0 < \delta \leq 1$. Đặt

$$\Omega_\delta := \{z \in \Omega : dist(z, \partial\Omega) > \delta\},$$

và

$$u_\delta(z) := \sup_{\overline{B(z,\delta)}} u,\ z \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Cho $z \in \partial\Omega_\delta$ và $w \in \overline{B(z,\delta)}$. Chọn $\xi \in \partial\Omega$ sao cho $|z - \xi| < 2\delta$. Từ (1.1) ta có

$$u(w) - u(z) \leq \phi(\xi) - h_\xi(w) - u(z) \leq -h_\xi(z) - h_\xi(w).$$

Để đơn giản và thuận tiện trong trình bày ta sử dụng ký hiệu $A \lesssim B$ nghĩa là tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho $A \leqslant CB$. Trong tình huống dưới đây, C không phụ thuộc vào z, w, ξ, δ. Vì $\rho \in \mathcal{C}^{0,\frac{2}{m}}(\overline{\Omega})$ và $\rho(\xi) = 0$, nên

$$\begin{aligned}u(w)-u(z) &\lesssim [\rho(\xi)-\rho(z)]^{\frac{\alpha}{2}} + |z-\xi|^{\alpha} + [\rho(\xi)-\rho(w)]^{\frac{\alpha}{2}} + |w-\xi|^{\alpha}\\ &\lesssim |z-\xi|^{\frac{\alpha}{m}} + |z-\xi|^{\alpha} + |w-\xi|^{\frac{\alpha}{m}} + |w-\xi|^{\alpha}\\ &\lesssim \delta^{\frac{\alpha}{m}} + \delta^{\alpha} \lesssim \delta^{\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)}.\end{aligned}$$

Từ đó,

$$u(w)-u(z) \le B\delta^{\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)},$$

trong đó B là hằng số dương độc lập với w, z, δ. Vì vậy,

$$u(z) \ge u_\delta(z) - B\delta^{\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)},\ \forall z \in \partial\Omega_\delta. \tag{1.2}$$

Bây giờ, ta đặt

$$\varphi_\delta := \begin{cases}\max(u_\delta - B\delta^{\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)}, u) & \text{trên } \Omega_\delta\\ u & \text{trên } \Omega\backslash\Omega_\delta\end{cases}.$$

Khi đó, từ (1.2) ta có $\varphi_\delta \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. Tiếp theo, cố định $\xi \in \partial\Omega$. Chọn $R > 0$ sao cho

$$-h_\xi \ge 2M \text{ trên } \overline{\Omega}\backslash B(0,R). \tag{1.3}$$

Do $\varphi_\delta \le M$ trong Ω và $u = \varphi_\delta = \phi$ trên $\partial\Omega$, bởi (1.1) ta suy ra

$$\varphi_\delta - \phi(\xi) + h_\xi \le 0 \text{ trên } \partial(\Omega \cap B(0,R)).$$

Từ đây, bởi nguyên lý cực đại ta có

$$\varphi_\delta - \phi(\xi) + h_\xi \le 0 \text{ trên } \Omega \cap B(0,R).$$

Kết hợp điều này với (1.3) ta có

$$\varphi_\delta \le \phi(\xi) - h_\xi \text{ trên } \Omega, \forall\xi \in \partial\Omega.$$

Do đó, bởi định nghĩa của u ta có

$$\varphi_\delta \le u \text{ trong } \Omega.$$

Vì vậy,

$$u_\delta \leq \varphi_\delta + B\delta^{\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)} \leq u + B\delta^{\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)} \text{ trên } \overline{\Omega}_\delta.$$

Theo Mệnh đề 1.1.3, ta nhận được $u \in \mathcal{C}^{0,\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)}(\overline{\Omega})$. □

Tiếp theo, cũng trong hoàn cảnh của Mệnh đề 1.1.4 ta sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm bị chặn của bài toán $MA(\Omega, \phi, f)$ trên miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại m cho trường hợp f có giá compact trong Ω.

Mệnh đề 1.1.5. *Với mỗi $p > 1$ và với mỗi $0 \leq f \in L^p(\Omega)$ có giá compact trong Ω, tồn tại một hằng số $A > 0$ và một nghiệm bị chặn $u(\Omega, \phi, f)$ của $MA(\Omega, \phi, f)$ sao cho*

$$u(\Omega, \phi, 0) + A\rho \leq u(\Omega, \phi, f) \leq u(\Omega, \phi, 0) \textit{ trên } \overline{\Omega},$$

ở đó $u(\Omega, \phi, 0)$ được định nghĩa như trong Mệnh đề 1.1.4.

Chứng minh. Đặt $u_0 := u(\Omega, \phi, 0)$. Đầu tiên, ta chỉ ra tồn tại $A > 0$ và $\psi \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sao cho $A\rho \leq \psi \leq 0$ và

$$(dd^c\psi)^n \geq f dV \text{ trong } \Omega.$$

Thật vậy, chọn $\delta > 0$ và D là miền giả lồi mạnh, bị chặn, trơn thỏa mãn

$$supp f \Subset \{\rho < -\delta\} \Subset D.$$

Theo Định lý 3 trong [36] luôn tồn tại một nghiệm liên tục ψ_0 của bài toán $MA(D, 0, f)$. Ta chọn $A > 0$ sao cho $supp f \Subset D \cap \{\psi_0 > A(\rho + \delta)\}$. Đặt

$$\psi := \begin{cases} \max(\psi_0 - A\delta, A\rho) & \text{trên } D, \\ A\rho & \text{trên } \Omega \backslash D. \end{cases}$$

Ta dễ dàng thấy rằng $\psi \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ và $A\rho \leq \psi \leq 0$ trên $\overline{\Omega}$. Do $supp f \Subset D \cap \{\psi > A\rho\}$ nên theo Định lý 4.1 trong [34] ta có,

$$(dd^c\psi)^n \geq 1_{D\cap\{\psi > A\rho\}}(dd^c\psi)^n = 1_{D\cap\{\psi > A\rho\}}(dd^c(\psi_0 - A\delta))^n = f dV \text{ trong } \Omega.$$

Bây giờ, cho $\{\Omega_j\}$ là một dãy tăng các miền giả lồi mạnh, bị chặn, trơn sao cho $suppf \Subset \Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$, $\forall j \geq 1$ và $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Theo Định lý 3 trong [36], tồn tại nghiệm liên tục u_j của $MA(\Omega_j, u_0, f)$. Do $u_0 + \psi \leq u_j \leq u_0$ trên $\partial\Omega_j$ và

$$(dd^c(u_0 + \psi))^n \geq (dd^c u_j)^n \geq (dd^c u_0)^n,$$

theo nguyên lý so sánh ta có

$$u_0 + \psi \leq u_j \leq u_0 \text{ trên } \overline{\Omega}_j.$$

Điều này suy ra

$$u_{j+1} \leq u_0 = u_j \text{ trên } \partial\Omega_j.$$

Tiếp tục áp dụng nguyên lý so sánh, ta có

$$u_{j+1} \leq u_j \text{ trên } \overline{\Omega}_j.$$

Đặt $u := \lim_{j\to\infty} u_j$. Do

$$u_0 + A\rho \leq u_0 + \psi \leq u \leq u_0 \text{ trên } \overline{\Omega}$$

Vì vậy $u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ và $(dd^c u)^n = f dV$ trong Ω. Vậy, u là một nghiệm bị chặn của $MA(\Omega, \phi, f)$. □

Theo Định lý 3 trong [36] và Mệnh đề 1.1.5 ta có định lí về sự tồn tại nghiệm của bài toán $MA(\Omega, \phi, f)$.

Định lý 1.1.6. *Cho $m > 0$ và Ω là miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại m. Cho $\phi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ với $0 < \alpha \leq 1$ và $0 \leq f \in L^p(\Omega)$ với $p > 1$. Giả sử Ω là bị chặn hoặc giá của f là tập compact trong Ω. Khi đó, tồn tại nghiệm bài toán $MA(\Omega, \phi, f)$.*

Nhật xét. Ta biết rằng tính duy nhất nghiệm trên miền bị chặn được suy ra từ Định lý 3.9 trong [13]. Tuy nhiên, trên miền không bị chặn thì tính duy nhất của nghiệm vẫn là bài toán mở.

1.2 Tính liên lục Hölder của nghiệm bài toán Dirichlet

Để nghiên cứu tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán $MA\left(\Omega,\phi,f\right)$ ta sẽ áp dụng kỹ thuật của V. Guedj, S. Kołodziej và A. Zeriahi [26], do đó ta cần khái niệm C_n-dung lượng của các tập Borel, được hai tác giả E. Bedford và B.A. Taylor [4] giới thiệu và nghiên cứu đầu tiên từ 1982.

Định nghĩa 1.2.1. Cho $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ là một tập mở. Nếu K là tập con compact của Ω. Khi đó, C_n-dung lượng của K đối với Ω được định nghĩa là

$$C_n\left(K,\Omega\right):=\sup\left\{\int\limits_K\left(dd^cu\right)^n:\ u\in\mathcal{PSH}\left(\Omega\right),\ -1\leqslant u\leqslant 0\right\}.$$

Nếu E là tập con của Ω thì

$$C_n\left(E,\Omega\right):=\sup\left\{C_n\left(K,\Omega\right):\ K \text{ là tập con compact của E}\right\}.$$

Chú ý rằng nếu E là tập Borel thì

$$C_n\left(E,\Omega\right)=\sup\left\{\int\limits_E\left(dd^cu\right)^n:\ u\in\mathcal{PSH}\left(\Omega\right),\ -1\leqslant u\leqslant 0\right\}.$$

Trong [4], các tác giả đã nghiên cứu nhiều tính chất quan trọng ban đầu liên quan đến khái niệm này. Trước khi trình bày các nội dung tiếp theo, ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.2. *Cho $m>0$ và Ω là miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại m. Cho $p>1$ và $0\leq f\in L^p(\Omega)$ với giá compact trên Ω. Giả sử $u\in\mathcal{PSH}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ sao cho $(dd^cu)^n=fdV$ trong Ω. Khi đó, với mỗi*

$$0\leq\gamma<\frac{1}{1+\frac{np}{p-1}},$$

tồn tại một hằng số dương A_γ sao cho

$$\sup_{\Omega}(v-u) \leq A_\gamma \left(\int\limits_{suppf} |u-v| dV \right)^\gamma,$$

với mỗi $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ với $\{u \leq v - \varepsilon\} \Subset \Omega$, $\forall \varepsilon > 0$.

Chứng minh. Chứng minh được đưa ra tương tự [26]. Tuy nhiên, để thuận tiện cho người đọc, ta sẽ trình bày chi tiết như sau. Cho ρ như trong Định nghĩa 1.1.2. Ta cố định $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ sao cho

$$\{u \leq v - \delta\} \Subset \Omega,\ \forall \delta > 0.$$

Để đơn giản, $A \lesssim B$ được ký hiệu là tồn tại hằng số dương C độc lập với v sao cho $A \leqslant CB$. Đặt

$$\varepsilon := \left(\int\limits_{suppf} |u-v| \beta^n \right)^\gamma$$

và

$$\tau := \frac{\gamma q}{1 - \gamma(nq+1)},$$

ở đó $q = \frac{p}{p-1}$ và $\beta := dd^c|z|^2$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 < \varepsilon < +\infty$. Chứng minh được chia thành hai bước:

Bước 1. Ta chứng minh tồn tại một hằng số $B_\tau > 0$ sao cho

$$\int\limits_E dV \leq B_\tau \left[\mathrm{C_n}(E, \Omega) \right]^{q(1+n\tau)},$$

với mỗi tập con Borel $E \subset suppf$. Thật vậy, cho $\delta > 0$ và D là miền siêu lồi bị chặn sao cho

$$suppf \Subset \{\rho < -2\delta\} \Subset \{\rho < -\delta\} \Subset D \Subset \Omega.$$

Ta giả sử rằng $\varphi \in \mathcal{PSH}(D)$ với $-1 \leq \varphi \leq 0$ và ta định nghĩa

$$\psi := \begin{cases} \max(\delta\varphi, \rho+\delta) & \text{trên } D, \\ \rho+\delta & \text{trên } \Omega\backslash D. \end{cases}$$

Khi đó, $\psi \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ và $-\delta \le \psi \le \delta$ trong Ω. Cho $E \subset suppf$ là một tập Borel. Vì

$$\varphi = \frac{\psi}{\delta} \text{ trong } \{\rho < -2\delta\},$$

nên theo Định lý 4.1 trong [34] ta có

$$\begin{aligned} \int_E (dd^c\varphi)^n &= \int_E \left(dd^c\frac{\psi}{\delta}\right)^n \\ &= 2^n \int_E \left(dd^c\frac{\psi-\delta}{2\delta}\right)^n \le 2^n \mathrm{C_n}(E,\Omega). \end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$\mathrm{C_n}(E,D) \le 2^n \mathrm{C_n}(E,\Omega).$$

Do $q(1+n\tau) > 1$, theo Mệnh đề 1.4 trong [26] tồn tại hằng số $C_\tau > 0$ không phụ thuộc E sao cho

$$\int_E dV \le C_\tau \left[\mathrm{C_n}(E,D)\right]^{q(1+n\tau)}.$$

Vì vậy,

$$\int_E dV \le B_\tau \left[\mathrm{C_n}(E,\Omega)\right]^{q(1+n\tau)},$$

ở đó $B_\tau = 2^n C_\tau$ là hằng số dương không phụ thuộc E.

Bước 2. Xét hàm liên tục phải, giảm g được định nghĩa trên $\mathbb{R}^+$ như sau

$$g(s) := \left[\mathrm{C_n}(U_s,\Omega)\right]^{\frac{1}{n}}, \text{ ở đó } U_s := \{u - v < -2\varepsilon - s\}.$$

Đầu tiên, ta chứng minh

$$tg(s+t) \lesssim [g(s)]^{1+n\tau} \text{ với mọi } t, s > 0.$$

Thật vậy, cố định $s, t > 0$. Cho Ω' là miền giả lồi mạnh, bị chặn, trơn sao cho $\{u - v < -\varepsilon\} \Subset \Omega' \Subset \Omega$. Do

$$\liminf_{\Omega' \ni z \to \partial\Omega'} (u + 2\varepsilon - v) \geq 0,$$

theo Bổ đề 1.3 trong [26] ta thu được

$$\begin{aligned} t^n[g(s+t)]^n &= t^n \mathrm{C_n}(U_{s+t}, \Omega) \\ &\leq t^n \mathrm{C_n}(\{u + 2\varepsilon - v < -s - t\}, \Omega') \\ &\leq \int\limits_{\{u+2\varepsilon-v<-s\}} (dd^c u)^n = \int\limits_{suppf \cap U_s} f dV. \end{aligned}$$

Theo bước 1 và sử dụng bất đẳng thức Hölder,

$$\begin{aligned} tg(s+t) &\leq \left(\int\limits_{suppf \cap U_s} f dV \right)^{\frac{1}{n}} \lesssim \left(\int\limits_{suppf \cap U_s} dV \right)^{\frac{1}{nq}} \\ &\lesssim [\mathrm{C_n}(suppf \cap U_s, \Omega)]^{\frac{1+n\tau}{n}} \\ &\leq [\mathrm{C_n}(U_s, \Omega)]^{\frac{1+n\tau}{n}} = [g(s)]^{1+n\tau}. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 1.5 trong [26] ta có $g(s) = 0$ với mọi $s \geq s_\infty$, trong đó

$$s_\infty \lesssim [g(0)]^{n\tau}.$$

Điều này cho ta

$$u - v \geq -2\varepsilon - s_\infty \text{ trên } \Omega.$$

Vì vậy, theo Bổ đề 1.3 trong [26] và sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta kết thúc chứng minh như sau:

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega}(v-u) &\le 2\varepsilon + s_\infty \lesssim \varepsilon + [g(0)]^{n\tau} \\
&\le \varepsilon + [\mathrm{Cap}(\{u-v<-2\varepsilon\},\Omega')]^{\tau} \\
&\lesssim \varepsilon + \left[\varepsilon^{-n} \int\limits_{\Omega'\cap\{u+\varepsilon-v<-\frac{\varepsilon}{2}\}} (dd^c u)^n\right]^{\tau} \\
&= \varepsilon + \left(\varepsilon^{-n} \int\limits_{\Omega'\cap\{u+\varepsilon-v<-\frac{\varepsilon}{2}\}} f dV\right)^{\tau} \\
&\lesssim \varepsilon + \left(\varepsilon^{-n-\frac{1}{q}} \int\limits_{suppf} f|u-v|^{\frac{1}{q}} dV\right)^{\tau} \\
&\lesssim \varepsilon + \left[\varepsilon^{-n-\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{suppf} |u-v| dV\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\tau} \\
&= \varepsilon + \varepsilon^{(-n-\frac{1}{q}+\frac{1}{q\gamma})\tau} = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Tiếp theo, ta nghiên cứu bài toán $MA(\Omega, \phi, f)$ trên các miền giả lồi không trơn (không nhất thiết bị chặn), đa điều hòa dưới loại m cho trường hợp $0 \le f \in L^p(\Omega)$ có giá compact trên Ω.

Định lý 1.2.3. *Cho $m > 0$ và Ω là miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại m. Cho ρ như trong Định nghĩa 1.1.2 và $\phi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ là hàm bị chặn với $0 < \alpha \le 1$. Cho $u(\Omega, \phi, 0)$ như trong Mệnh đề 1.1.4. Khi đó, với mỗi $p > 1$ và với mỗi $0 \le f \in L^p(\Omega)$ có giá compact trên Ω, tồn tại một hằng số $A > 0$ và một nghiệm bị chặn $u(\Omega, \phi, f)$ của bài toán $MA(\Omega, \phi, f)$*

sao cho

$$u(\Omega, \phi, 0) + A\rho \le u(\Omega, \phi, f) \le u(\Omega, \phi, 0) \text{ \textit{trên} } \overline{\Omega}.$$

Hơn nữa, nghiệm $u(\Omega, \phi, f) \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *với mọi*

$$0 < \gamma < \min\left(\frac{\alpha}{2m}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{1 + \frac{np}{p-1}}\right).$$

Chứng minh. Sự tồn tại nghiệm được suy ra từ Mệnh đề 1.1.5. Ta cần chứng minh $u(\Omega, \phi, f) \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ với mọi γ thỏa mãn

$$0 < \gamma < \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2m}, \frac{1}{1 + \frac{np}{p-1}}\right).$$

Đặt $v := A\rho$, $w := u(\Omega, \phi, 0)$ và $u := u(\Omega, \phi, f)$. Ta dễ dàng suy ra rằng $v \in \mathcal{C}^{0,\frac{2}{m}}(\overline{\Omega})$. Theo Mệnh đề 1.1.4 và Mệnh đề 1.1.5 ta có $w \in \mathcal{C}^{0,\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)}(\overline{\Omega})$ và

$$v + w \le u \le w \text{ trên } \overline{\Omega}. \tag{1.4}$$

Cố định $0 < \gamma < \min\left(\frac{\alpha}{2m}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{1+\frac{np}{p-1}}\right)$. Chọn $\delta_0 \in (0, 1)$ sao cho $supp f + \mathbb{B}(0, \sqrt{\delta_0}) \Subset \Omega$. Cho $\delta \in (0, \delta_0)$ và $\varphi \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. Ta định nghĩa

$$\Omega_\delta := \{z \in \Omega : dist(z, \partial\Omega) > \delta\},$$

$$\varphi_\delta(z) := \sup_{\mathbb{B}(z,\delta)} \varphi, \; z \in \overline{\Omega}_\delta$$

và

$$\hat{\varphi}_\delta(z) := \frac{1}{\sigma_{2n}\delta^{2n}} \int\limits_{\mathbb{B}(z,\delta)} \varphi dV, \; z \in \overline{\Omega}_\delta,$$

ở đó σ_{2n} là thể tích của hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^n$. Từ đánh giá $2\gamma < \min(\frac{\alpha}{m}, \alpha) \le \frac{2}{m}$ ta có $v, w \in \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$. Từ đây,

$$w(\xi) - w(z) \lesssim |z - \xi|^{2\gamma} \lesssim \delta^{2\gamma},$$

với mỗi $z \in \overline{\Omega}_\delta$ và với mỗi $\xi \in \overline{\mathbb{B}(z,\delta)}$. Vì vậy,

$$w_\delta - w \lesssim \delta^{2\gamma} \text{ trên } \overline{\Omega}_\delta.$$

Theo giả thiết, ta có

$$u_\delta - u \le w_\delta - w - v \lesssim -v + \delta^{2\gamma} \text{ on } \overline{\Omega}_\delta. \tag{1.5}$$

Vì $v = 0$ trên $\partial\Omega$ và $v \in \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$, nên ta có

$$|v| \lesssim \delta^{2\gamma} \text{ trên } \partial\Omega_\delta.$$

Kết hợp với (1.5) ta được

$$u_\delta - u \lesssim \delta^{2\gamma} \text{ trên } \partial\Omega_\delta.$$

Như vậy, tồn tại hằng số dương A độc lập với δ sao cho

$$w_\delta \le w + A\delta^{2\gamma},\ v_\delta \le v + A\delta^{2\gamma} \text{ trên } \overline{\Omega}_\delta \text{ và } u_\delta \le u + A\delta^{2\gamma} \text{ trên } \partial\Omega_\delta. \tag{1.6}$$

Do $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ và $suppf + \mathbb{B}(0,\sqrt{\delta_0}) \Subset \Omega$, ta có

$$\int\limits_{suppf+\mathbb{B}(0,\sqrt{\delta_0})} \Delta u dV < +\infty. \tag{1.7}$$

Từ công thức Jensen và sử dụng tọa độ cực, với mỗi $z \in \Omega_{\sqrt{\delta}}$,

$$\hat{u}_{\sqrt{\delta}}(z) - u(z) = \frac{1}{\sigma_{2n-1}\delta^n} \int\limits_0^{\sqrt{\delta}} r^{2n-1} dr \int\limits_0^r t^{1-2n} \left(\int\limits_{|\xi - z| \le t} \Delta u(\xi) dV(\xi) \right) dt.$$

Từ đó, bởi (1.7) và sử dụng Định lý Fubini ta được

$$\int\limits_{suppf} [\hat{u}_{\sqrt{\delta}}(z) - u(z)] dV(z) = \frac{1}{\sigma_{2n-1}\delta^n} \int_{suppf} \Bigg[\int\limits_0^{\sqrt{\delta}} r^{2n-1} dr \int\limits_0^r t^{1-2n}$$

$$\times \left(\int\limits_{|\xi - z| \le t} \Delta u(\xi) dV(\xi) \right) dt \Bigg] dV(z)$$

$$\lesssim \delta^{-n} \int\limits_0^{\sqrt{\delta}} r^{2n-1} dr \int\limits_0^r t^{1-2n}$$

$$\times \left[\int\limits_{|\xi| \le t} \left(\int\limits_{supp f} \Delta u(z+\xi) dV \right) dV(\xi) \right] dt$$

$$\lesssim \delta^{-n} \int\limits_0^{\sqrt{\delta}} r^{2n-1} dr \int\limits_0^r t^{1-2n}$$

$$\times \left[\int\limits_{|\xi| \le t} \left(\int\limits_{supp f + \mathbb{B}(0, \sqrt{\delta_0})} \Delta u dV \right) dV(\xi) \right] dt$$

$$\lesssim \delta. \tag{1.8}$$

Bây giờ, ta đặt

$$U_{\sqrt{\delta}} := \begin{cases} \max(u_{\sqrt{\delta}} - 4A\delta^\gamma, u) & \text{trên } \Omega_{\sqrt{\delta}} \\ u & \text{trên } \Omega \backslash \Omega_{\sqrt{\delta}} \end{cases}$$

và

$$\hat{U}_{\sqrt{\delta}} := \begin{cases} \max(\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - 4A\delta^\gamma, u) & \text{trên } \Omega_{\sqrt{\delta}} \\ u & \text{trên } \Omega \backslash \Omega_{\sqrt{\delta}}. \end{cases}$$

Khi đó, $U_{\sqrt{\delta}}, \hat{U}_{\sqrt{\delta}} \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. Do $v + w \le u \le w$ trên $\overline{\Omega}$, vì vậy bởi (1.6) ta được

$$\begin{aligned} u_{\sqrt{\delta}} &\le w_{\sqrt{\delta}} \le w + A\delta^\gamma \\ &\le u - v + A\delta^\gamma \le u + 4A\delta^\gamma \end{aligned}$$

trên $\overline{\Omega}_{\sqrt{\delta}} \cap \{v \geq -3A\delta^\gamma\}$. Theo giả thiết,

$$\{u < \hat{U}_{\sqrt{\delta}}\} \subset \Omega_{\sqrt{\delta}} \cap \{u < u_{\sqrt{\delta}} - 4A\delta^\gamma\} \subset \Omega_{\sqrt{\delta}} \cap \{v < -3A\delta^\gamma\} \Subset \Omega.$$

Hơn nữa, do $\hat{U}_{\sqrt{\delta}} \leq \hat{u}_{\sqrt{\delta}}$ trong $\Omega_{\sqrt{\delta}}$ và $0 < \gamma < \frac{1}{1+\frac{np}{p-1}}$, theo Mệnh đề 1.2.2 và sử dụng (1.8) ta có

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega}(\hat{U}_{\sqrt{\delta}} - u) &\lesssim \left(\int_{suppf} |\hat{U}_{\sqrt{\delta}} - u| dV\right)^\gamma \\ &\leq \left(\int_{suppf} |\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - u| dV\right)^\gamma \lesssim \delta^\gamma.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Bổ đề 4.3 trong [31] suy ra rằng

$$|\hat{u}_\delta(x) - \hat{u}_\delta(y)| \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}|x-y|}{\delta}, \ \forall x, y \in \Omega_\delta.$$

Cho $z \in \Omega_{2\sqrt{\delta}} \subset \Omega_{2\delta}$. Do $u \leq \hat{u}_\delta$ trong Ω_δ, ta có

$$\begin{aligned}u_\delta(z) &= \sup_{t \in \mathbb{B}(0,\delta)} u(z+t) \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{B}(0,\delta)} \hat{u}_{\sqrt{\delta}}(z+t) \leq \hat{u}_{\sqrt{\delta}}(z) + \sqrt{\delta}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

Từ đó, bởi (1.9) ta được

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega_{2\sqrt{\delta}}}(u_\delta - u) &\lesssim \sup_{\Omega_{2\sqrt{\delta}}}(\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - u) + \sqrt{\delta} \\ &\lesssim \sup_{\Omega}(\hat{U}_{\sqrt{\delta}} - u) + \delta^\gamma + \sqrt{\delta} \\ &\lesssim \delta^\gamma.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Bây giờ, bởi vì $v = 0$ trên $\partial\Omega$ và $v \in \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$, do đó theo (1.4) ta được

$$w - \delta^\gamma \lesssim u \lesssim w \text{ trên } \Omega \backslash \Omega_{2\sqrt{\delta}}.$$

Hơn nữa, từ $w \in \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$, điều này suy ra

$$u_\delta \lesssim u + \delta^\gamma \text{ trên } \Omega_\delta \backslash \Omega_{2\sqrt{\delta}}.$$

Kết hợp điều này với (1.10) và sử dụng Mệnh đề 1.1.3, ta đạt được $u \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Vậy chứng minh được hoàn thành. □

Bây giờ, ta đưa ra kết quả tổng quát cho bài toán $MA\left(\Omega, \phi, f\right)$ trên các miền giả lồi không trơn, đa điều hòa dưới loại m.

Định lý 1.2.4. *Cho $m > 0$ và Ω là miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại m. Cho $\phi \in C^{0,\alpha}\left(\partial\Omega\right)$ là hàm bị chặn với $0 < \alpha \leqslant 1$ và cho $0 \leq f \in L^p(\Omega)$ với $p > 1$. Giả sử rằng Ω là miền bị chặn hoặc f có giá compact trên Ω. Khi đó, tồn tại một nghiệm bị chặn, liên tục γ^2-Hölder $u(\Omega;\phi;f)$ của bài toán $MA(\Omega;\phi;f)$ với mọi*

$$0 < \gamma < \min\left(\frac{\alpha}{2m}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2m\left(1+\frac{np}{p-1}\right)}, \frac{1}{2\left(1+\frac{np}{p-1}\right)}\right).$$

Chứng minh. Khi giá của f là tập compact trên Ω, chứng minh được suy ra từ Định lí 1.2.3. Bây giờ, ta giả sử Ω là miền bị chặn. Theo Định lý 3 [36] và Định lý 3.9 trong [13], tồn tại duy nhất nghiệm u của $MA(\Omega, \phi, f)$. Ta cần chứng minh $u \in \mathcal{C}^{0,\gamma^2}(\overline{\Omega})$ với mọi

$$0 < \gamma < \gamma_{m,\alpha,p} := \min\left(\frac{\alpha}{2m}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2m(1+\frac{np}{p-1})}, \frac{1}{2(1+\frac{np}{p-1})}\right).$$

Cố định $\gamma \in (0, \gamma_{m,\alpha,p})$. Cho D là miền giả lồi chặt, bị chặn sao cho $\Omega \Subset D$. Do D là miền giả lồi, đa điều hòa dưới loại 2, theo Định lí 1.2.3 tồn tại nghiệm u' liên tục γ'-Hölder của bài toán $MA(D, 0, 1_\Omega f)$ với mọi

$$0 < \gamma' < \frac{1}{1+\frac{np}{p-1}}.$$

Áp dụng Mệnh đề 1.1.4, tồn tại nghiệm ϕ' liên tục $\min(\frac{\gamma'}{m}, \gamma')$-Hölder của $MA(\Omega, -u', 0)$ với mọi

$$0 < \gamma' < \frac{1}{1+\frac{np}{p-1}}.$$

Ta đặt $v := u' + \phi'$. Khi đó, $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $v = 0$ trên $\partial\Omega$ và $v \in \mathcal{C}^{0,\min(\frac{\gamma'}{m},\gamma')}(\overline{\Omega})$ với mọi

$$0 < \gamma' < \frac{1}{1+\frac{np}{p-1}}.$$

Cũng theo Mệnh đề 1.1.4, tồn tại nghiệm w liên tục $\min(\frac{\alpha}{m},\alpha)$-Hölder của bài toán $MA(\Omega,\phi,0)$. Từ $v + w = u = w$ trên $\partial\Omega$ và

$$(dd^c(v+w))^n \geq (dd^c u')^n = (dd^c u)^n \geq (dd^c w)^n \text{ trong } \Omega,$$

theo nguyên lý so sánh ta có

$$v + w \leq u \leq w \text{ trên } \overline{\Omega}.$$

Cho $\delta \in (0,1)$ và Ω_δ, u_δ, $\hat{u}_\delta$ như trong chứng minh của Định lí 1.2.3.

Ta ký hiệu $A \lesssim B$ là tồn tại hằng số dương C độc lập với z, ξ, δ sao cho $A \leq CB$. Từ

$$0 < 2\gamma < 2\gamma_{m,\alpha,p} = \min\left(\min\left(\frac{\alpha}{m},\alpha\right), \min\left(\frac{1}{m(1+\frac{np}{p-1})}, \frac{1}{1+\frac{np}{p-1}}\right)\right)$$

do đó $v, w \in \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$. Từ đó,

$$w(\xi) - w(z) \lesssim |z-\xi|^{2\gamma} \lesssim \delta^{2\gamma},$$

với mỗi $z \in \overline{\Omega}_\delta$ và với mỗi $\xi \in \overline{\mathbb{B}(z,\delta)}$. Vì vậy,

$$w_\delta - w \lesssim \delta^{2\gamma} \text{ trên } \overline{\Omega}_\delta.$$

Theo giả thiết, ta suy ra

$$u_\delta - u \leq w_\delta - w - v \lesssim -v + \delta^{2\gamma} \text{ trên } \overline{\Omega}_\delta. \tag{1.11}$$

Do $v = 0$ trên $\partial\Omega$ và $v \in \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$, nên

$$|v| \lesssim \delta^{2\gamma} \text{ trên } \partial\Omega_\delta.$$

Kết hợp điều này với (1.11) ta suy ra

$$u_\delta - u \lesssim \delta^{2\gamma} \text{ trên } \partial\Omega_\delta.$$

Như vậy, tồn tại một hằng số $A \geq \|v\|_{\mathcal{C}^{2\gamma}(\overline{\Omega})} + \|w\|_{\mathcal{C}^{2\gamma}(\overline{\Omega})}$ độc lập với δ sao cho

$$w_\delta \leq w + A\delta^{2\gamma},\ v_\delta \leq v + A\delta^{2\gamma} \text{ trên } \overline{\Omega}_\delta \text{ và } u_\delta \leq u + A\delta^{2\gamma} \text{ trên } \partial\Omega_\delta. \tag{1.12}$$

Ta suy ra rằng

$$\{v < -3A\delta^{2\gamma}\} + \mathbb{B}(0,\delta) \subset \{v < -2A\delta^{2\gamma}\}. \tag{1.13}$$

Bây giờ, ta đặt

$$U_{\sqrt{\delta}} := \begin{cases} \max(u_{\sqrt{\delta}} - 4A\delta^\gamma, u) & \text{trên } \Omega_{\sqrt{\delta}} \\ u & \text{trên } \Omega\backslash\Omega_{\sqrt{\delta}} \end{cases}$$

và

$$\hat{U}_{\sqrt{\delta}} := \begin{cases} \max(\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - 4A\delta^\gamma, u) & \text{trên } \Omega_{\sqrt{\delta}} \\ u & \text{trên } \Omega\backslash\Omega_{\sqrt{\delta}}. \end{cases}$$

Theo (1.12) ta có $U_{\sqrt{\delta}}, \hat{U}_{\sqrt{\delta}} \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. Do $v + w \leq u \leq w$ trên $\overline{\Omega}$ nên cũng theo (1.12) ta được

$$\begin{aligned} u_{\sqrt{\delta}} \leq w_{\sqrt{\delta}} &\leq w + A\delta^\gamma \\ &\leq u - v + A\delta^\gamma \leq u + 4A\delta^\gamma \end{aligned}$$

trên $\overline{\Omega}_\delta \cap \{v \geq -3A\delta^\gamma\}$. Từ đó,

$$\begin{aligned} \{u < \hat{U}_{\sqrt{\delta}}\} &\subset \Omega_{\sqrt{\delta}} \cap \{u < u_{\sqrt{\delta}} - 4A\delta^\gamma\} \\ &\subset \Omega_{\sqrt{\delta}} \cap \{v < -3A\delta^\gamma\} \Subset \Omega. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Từ công thức Jensen và sử dụng tọa độ cực, với mỗi $z \in \Omega_{\sqrt{\delta}}$ ta có

$$\hat{u}_{\sqrt{\delta}}(z) - u(z) = \frac{1}{\sigma_{2n-1}\delta^n} \int_0^{\sqrt{\delta}} r^{2n-1} dr \int_0^r t^{1-2n} \left(\int_{|\xi - z| \le t} \Delta u(\xi) dV(\xi) \right) dt.$$

Theo Định lý Fubini và các bao hàm thức (1.13) và (1.14) ta suy ra

$$\begin{aligned}
\int_{\{u < \hat{U}_{\sqrt{\delta}}\}} (\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - u) dV &\lesssim \delta^{-n} \int_0^{\sqrt{\delta}} r^{2n-1} dr \int_0^r t^{1-2n} \\
&\quad \times \left[\int_{|\xi| \le t} \left(\int_{\{u < \hat{U}_{\sqrt{\delta}}\} + \mathbb{B}(0, \sqrt{\delta})} \Delta u dV \right) dV(\xi) \right] dt \\
&\lesssim \delta \int_{\{v < -2A\delta^\gamma\}} \Delta u dV \\
&\lesssim \delta \int_{\{v < -2A\delta^\gamma\}} dd^c u \wedge (dd^c |z|^2)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Do $v + w \le u \le v$ trên $\overline{\Omega}$, $v = 0$ trên $\partial\Omega$, $v \in \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$ và $0 \le 2\gamma, \delta \le 1$ nên

$$\{v < -2A\delta^\gamma\} \subset \{2v + w + 2A\delta^\gamma < u\} \subset \{v < -A\delta^\gamma\} \subset \Omega_{\sqrt{\delta}} \Subset \Omega.$$

Vì vậy, theo nguyên lý so sánh,

$$\begin{aligned}
\int_{\{u < \hat{U}_{\sqrt{\delta}}\}} (\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - u) dV &\lesssim \delta \int_{\{2v + w + 2A\delta^\gamma < u\}} dd^c u \wedge (dd^c |z|^2)^{n-1} \\
&\le \delta \int_{\{2v + w + 2A\delta^{2\gamma} < u\}} dd^c (2v + w + 2A\delta^\gamma) \wedge (dd^c |z|^2)^{n-1} \\
&\lesssim \delta \int_{\Omega_{\sqrt{\delta}}} dd^c h \wedge (dd^c |z|^2)^{n-1},
\end{aligned}$$

ở đó $h = v + w \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,2\gamma}(\overline{\Omega})$. Do Ω là miền bị chặn nên ta có

$$\int\limits_{\Omega} dV < +\infty.$$

Lại tiếp tục áp dụng công thức Jensen và Định lý Fubini, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{u<\hat{U}_{\sqrt{\delta}}\}} (\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - u)dV &\lesssim \delta \int\limits_{\Omega_{\sqrt{\delta}}} dd^c h \wedge (dd^c|z|^2)^{n-1} \\
&\lesssim \delta^{-n} \int\limits_0^{\frac{\sqrt{\delta}}{2}} r^{2n-1} dr \int\limits_0^r t^{1-2n} \\
&\quad \times \left[\int\limits_{|\xi|\le t} \left(\int\limits_{\Omega_{\sqrt{\delta}}} \Delta h(z) dV(z) \right) dV(\xi) \right] dt \\
&\lesssim \delta^{-n} \int\limits_0^{\frac{\sqrt{\delta}}{2}} r^{2n-1} dr \int\limits_0^r t^{1-2n} \\
&\quad \times \left[\int\limits_{|\xi|\le t} \left(\int\limits_{\Omega_{\frac{\sqrt{\delta}}{2}}} \Delta h(z+\xi) dV(z) \right) dV(\xi) \right] dt \\
&= \delta^{-n} \int\limits_{\Omega_{\frac{\sqrt{\delta}}{2}}} \left[\int\limits_0^{\frac{\sqrt{\delta}}{2}} r^{2n-1} dr \int\limits_0^r t^{1-2n} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int\limits_{|\xi-z|\le t} \Delta h(\xi) dV(\xi) \right) dt \right] dV(z) \\
&\lesssim \int\limits_{\Omega_{\frac{\sqrt{\delta}}{2}}} (\hat{h}_{\frac{\sqrt{\delta}}{2}} - h) dV \lesssim \delta^{\gamma} \int\limits_{\Omega} dV \lesssim \delta^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (1.14), Định lý 1.1 trong [26] và Bổ đề 4.3 trong

[31] ta suy ra

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega_{2\sqrt{\delta}}}(u_\delta - u) &\lesssim \sup_{\Omega_{2\sqrt{\delta}}}(\hat{u}_{\sqrt{\delta}} - u) + \sqrt{\delta}\\ &\lesssim \sup_{\Omega}(\hat{U}_{2\sqrt{\delta}} - u) + \delta^\gamma + \sqrt{\delta}\\ &\lesssim \left(\int\limits_{\{u<\hat{U}_{2\sqrt{\delta}}\}} |\hat{U}_{2\sqrt{\delta}} - u| dV \right)^\gamma + \delta^\gamma \lesssim \delta^{\gamma^2}.\end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 1.1.3, ta nhận được $u \in \mathcal{C}^{0,\gamma^2}(\overline{\Omega})$. □

Chương 2

Sự ổn định của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức

Trong phần đầu của chương, ta sẽ nghiên cứu mối liên hệ giữa sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy các hàm đa điều hòa dưới và sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère phức tương ứng.

2.1 Nguyên lý so sánh cho các hàm lớp Cegrell

Đầu tiên, ta có khái niệm về sự hội tụ theo dung lượng của một dãy hàm đa điều hòa dưới như sau.

Định nghĩa 2.1.1. Một dãy hàm $\{u_j\} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$, u_j được gọi là hội tụ tới hàm u theo C_n-dung lượng trên Ω khi $j \to +\infty$, nếu

$$\lim_{j\to+\infty} C_n\left(\{|u_j - u| > \delta\}, \Omega\right) = 0,\ \forall \delta > 0.$$

Tiếp theo, ta có khái niệm về các lớp hàm quan trọng đã được U. Cegrell giới thiệu.

Định nghĩa 2.1.2. Cho Ω là một miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ta nói một hàm đa điều hòa dưới âm, bị chặn φ trong Ω thuộc lớp $\mathcal{E}_0(\Omega)$ nếu

$\{\varphi < -\varepsilon\} \Subset \Omega$ với mọi $\varepsilon > 0$ và $\int\limits_{\Omega} (dd^c\varphi)^n < +\infty$.

Lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ được ký hiệu là họ các hàm đa điều hòa dưới φ xác định trên Ω, mà tồn tại một dãy giảm $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ để nó hội tụ điểm tới φ trên Ω khi $j \to +\infty$ và

$$\sup_j \int\limits_{\Omega} (dd^c\varphi_j)^n < +\infty.$$

Ta ký hiệu $\mathcal{E}(\Omega)$ là họ các hàm đa điều hòa dưới φ xác định trên Ω sao cho với mỗi tập mở $G \Subset \Omega$ tồn tại một hàm đa điều hòa dưới $\psi \in \mathcal{F}(\Omega)$ thỏa mãn $\psi = \varphi$ trong G.

Tiếp theo là lớp $\mathcal{N}(\Omega)$ được giới thiệu bởi U. Cegrell năm 2008.

Định nghĩa 2.1.3. Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$. Cho $\{\Omega_j\}$ là dãy tăng các miền siêu lồi thỏa mãn $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ và $\bigcup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j = \Omega$. Với mỗi $u \in \mathcal{E}(\Omega)$, ta đặt

$$u_j := \sup\left\{\varphi \in \mathcal{PSH}^-(\Omega) : \ \varphi \leqslant u \ \ trong\ \Omega \backslash \Omega_j\right\}$$

và khi đó,

$$\mathcal{N}(\Omega) := \{u \in \mathcal{E}(\Omega) : \ u_j \nearrow 0 \ \ h.k.n\ trong\ \Omega\}.$$

Ta dễ dàng thấy rằng $\mathcal{E}_0(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$.
Cho $\mathcal{K} \in \{\mathcal{F}, \mathcal{N}, \mathcal{E}\}$. Ta kí hiệu $\mathcal{K}^a(\Omega)$ là lớp con của $\mathcal{K}(\Omega)$ sao cho độ đo Monge-Ampère $(dd^c.)^n$ triệt tiêu trên tất cả các tập đa cực của Ω.
Cho $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $\mathcal{K} \in \{\mathcal{F}^a, \mathcal{N}^a, \mathcal{E}^a, \mathcal{F}, \mathcal{N}, \mathcal{E}\}$. Khi đó ta nói rằng một hàm đa điều hòa dưới φ được định nghĩa trên Ω thuộc lớp $\mathcal{K}(\Omega, f)$ nếu tồn tại một hàm $\psi \in \mathcal{K}(\Omega)$ thỏa mãn

$$\psi + f \leqslant \varphi \leqslant f \text{ trong } \Omega.$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ thì phần đa cực của $(dd^c u)^n$ luôn được mang bởi $\{f = -\infty\}$.

Mệnh đề 2.1.4. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi bị chặn. Giả sử $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $\int\limits_{\Omega} (-\rho)(dd^c u)^n < +\infty$ với $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Khi đó*

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{f=-\infty\}}(dd^c f)^n \text{ trong } \Omega.$$

Chứng minh. Cho $v \in \mathcal{F}^a(\Omega)$ sao cho $v + f \leq u \leq f$ trên Ω. Theo Bổ đề 4.1 và Bổ đề 4.12 trong [1] ta suy ra

$$\begin{aligned} 1_{\{f=-\infty\}}(dd^c f)^n &\leq 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n \\ &\leq 1_{\{v+f=-\infty\}}(dd^c (v+f))^n = 1_{\{f=-\infty\}}(dd^c f)^n. \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra rằng

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{f=-\infty\}}(dd^c f)^n \text{ trong } \Omega.$$

□

Mệnh đề 2.1.5. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi bị chặn. Cho $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ thỏa mãn $\int\limits_{\Omega} (-\rho)(dd^c u)^n < +\infty$ với $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Giả sử $v \in \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $v \leq f$ và $(dd^c v)^n \geq (dd^c u)^n$ trong Ω. Khi đó $v \leq u$ trên Ω.*

Chứng minh. Do $1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n$ triệt tiêu trên mọi tập con đa cực của Ω, theo Mệnh đề 4.3 trong [34] ta suy ra

$$(dd^c \max(u, v))^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Từ đó,

$$1_{\{\max(u,v)>-\infty\}}(dd^c \max(u, v))^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Hơn nữa, theo giả thiết và Mệnh đề 2.1.4 ta có

$$1_{\{\max(u,v)=-\infty\}}(dd^c \max(u,v))^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Vì vậy, $(dd^c \max(u,v))^n \geq (dd^c u)^n$ trong Ω. Do đó, từ Định lý 3.6 trong [1] ta suy ra rằng $\max(u,v) = u$ trên Ω. Do đó, $v \leq u$ trên Ω. □

2.2 Sự hội tụ theo dung lượng của các hàm đa điều hòa dưới

Trước khi trình bày kết quả chính của phần này, ta có các kết quả sau.

Mệnh đề 2.2.1. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền siêu lồi bị chặn và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Giả sử $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ và $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ thỏa mãn $\int\limits_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n < +\infty$. Khi đó, với mỗi $v \in \mathcal{E}^a(\Omega, f)$ và với mỗi $\varphi \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ với $\varphi \geq \rho$, ta có*

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{\{u<v\}} (v-u)^n (dd^c\varphi)^n + \int\limits_{\{u<v\}} -\varphi (dd^c v)^n \leq \int\limits_{\{u<v\}} -\varphi (dd^c u)^n.$$

Chứng minh. Với $j \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_j = \max(u, v - \frac{1}{j})$. Bởi vì $u \leq v_j \leq f$ trong Ω, ta có $v_j \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$. Theo Bổ đề 3.5 trong [1] ta có

$$\frac{1}{n!}\int\limits_\Omega (v_j-u)^n (dd^c\varphi)^n + \int\limits_\Omega -\varphi (dd^c v_j)^n \leq \int\limits_\Omega -\varphi (dd^c u)^n.$$

Hiển nhiên ta có $v_j = v - \frac{1}{j}$ trong $\{u < v_j\}$. Theo Định lý 4.1 trong [34], ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int\limits_{\{u<v_j\}} (v_j-u)^n (dd^c\varphi)^n + \int\limits_{\{u<v_j\}} -\varphi (dd^c v)^n \\
&= \frac{1}{n!}\int\limits_{\{u<v_j\}} (v_j-u)^n (dd^c\varphi)^n + \int\limits_{\{u<v_j\}} -\varphi (dd^c v_j)^n \\
&\leq \frac{1}{n!}\int\limits_\Omega (v_j-u)^n (dd^c\varphi)^n + \int\limits_{\{u<v_j\}} -\varphi (dd^c v_j)^n
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n!}\int\limits_{\Omega}(v_j-u)^n(dd^c\varphi)^n+\int\limits_{\Omega}-\varphi(dd^cv_j)^n-\int\limits_{\{u=v_j\}}-\varphi(dd^cv_j)^n$$
$$\leq \int\limits_{\Omega}-\varphi(dd^cu)^n-\int\limits_{\{u\geq v\}}-\varphi(dd^cv_j)^n.$$

Bây giờ, do $u = v_j$ trong $\{u > v - \frac{1}{j}\}$ nên theo Định lý 4.1 trong [34], ta suy ra rằng

$$(dd^cu)^n = (dd^cv_j)^n \text{ trong } \{u \geq v\} \cap \{u > -\infty\}.$$

Hơn nữa, theo Mệnh đề 2.1.4 ta suy ra

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu)^n = 1_{\{v_j=-\infty\}}(dd^cv_j)^n = 1_{\{f=-\infty\}}(dd^cf)^n \text{ trong } \Omega.$$

Từ đó, ta được

$$(dd^cu)^n = (dd^cv_j)^n \text{ trong } \{u \geq v\}.$$

Vì vậy,

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{\{u<v_j\}}(v_j-u)^n(dd^c\varphi)^n+\int\limits_{\{u<v_j\}}-\varphi(dd^cv)^n$$
$$\leq \int\limits_{\Omega}-\varphi(dd^cu)^n-\int\limits_{\{u\geq v\}}-\varphi(dd^cu)^n=\int\limits_{\{u<v\}}-\varphi(dd^cu)^n.$$

Cho $j \to +\infty$ ta thu được

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{\{u<v\}}(v-u)^n(dd^c\varphi)^n+\int\limits_{\{u<v\}}-\varphi(dd^cv)^n\leq\int\limits_{\{u<v\}}-\varphi(dd^cu)^n.$$

□

Bổ đề 2.2.2. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi bị chặn và $\{u_j\} \subset \mathcal{E}^a(\Omega)$ sao cho $u_j \geq u_1$ với mỗi $j \geq 1$ và $u_j \to u_0$ theo C_n-dung lượng trong Ω. Giả sử $\{\varphi_j^k\}$, $k = 1, 2$ là dãy các hàm đa điều hòa dưới bị chặn đều trong Ω và hội tụ yếu tới hàm đa điều hòa dưới φ_0^k trong Ω. Khi đó*

$$\varphi_j^1\varphi_j^2(dd^cu_j)^n \to \varphi_0^1\varphi_0^2(dd^cu_0)^n \text{ yếu khi } j \to +\infty.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $u_j \in \mathcal{F}^a(\Omega)$ và $-1 \le \varphi_j^k \le 0$ trong Ω với mọi $j \ge 0$, $k = 1, 2$. Đặt

$$\psi_j^1 = \frac{(\varphi_j^1 + \varphi_j^2 + 2)^2 + 4}{2},\ \psi_j^2 = \frac{(\varphi_j^1 + 2)^2}{2} \text{ và } \psi_j^3 = \frac{(\varphi_j^2 + 2)^2}{2}.$$

Dễ thấy rằng $\psi_j^k \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $0 \le \psi_j^k \le 4$ và $\psi_j^k \to \psi_0^k$ yếu trong Ω khi $j \to +\infty$, $k = 1, 2, 3$. Từ $\varphi_j^1\varphi_j^2 = \psi_j^1 - \psi_j^2 - \psi_j^3$ trong Ω và theo Định lý 3.4 trong [42], ta đạt được

$$\begin{aligned}\varphi_j^1\varphi_j^2(dd^cu_j)^n &= \psi_j^1(dd^cu_j)^n - \psi_j^2(dd^cu_j)^n - \psi_j^3(dd^cu_j)^n \\ &\to \psi_0^1(dd^cu_0)^n - \psi_0^2(dd^cu_0)^n - \psi_0^3(dd^cu_0)^n = \varphi_0^1\varphi_0^2(dd^cu_0)^n\end{aligned}$$

yếu trong Ω khi $j \to +\infty$. $\square$

Như đã giới thiệu ở đầu chương, nội dung chính của phần này là:

Định lý 2.2.3. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền siêu lồi bị chặn và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $w \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $\int_\Omega (-\rho)(dd^cw)^n < +\infty$ với $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Giả sử $\{u_j\} \subset \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $u_j \to u_0$ h.k.n trên Ω khi $j \to +\infty$ và $u_j \ge w$ trong Ω với mọi $j \ge 0$. Khi đó, ta có các mệnh đề sau là tương đương.*

(a) $u_j \to u_0$ theo C_n-dung lượng trong Ω;

(b) Với mỗi $a > 0$, ta có

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right)(dd^cu_j)^n = \int_\Omega \max\left(\frac{u_0}{a}, \rho\right)(dd^cu_0)^n.$$

(c) Với mỗi $a > 0$, ta có

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \left[\max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right)\right](dd^cu_j)^n = 0,$$

ở đó $v_j := \left(\sup_{k\ge j} u_k\right)^*$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $f < 0$ và $-1 \leq \rho \leq 0$ trong Ω.

(a)$\Rightarrow$(b). Cố định $a > 0$. Đặt

$$\varphi_j := \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right).$$

Bởi vì

$$0 \leq \sup_j \int_\Omega -\varphi_j (dd^c u_j)^n \leq \int_\Omega -\rho (dd^c w)^n < +\infty,$$

ta còn phải chứng minh tồn tại một dãy con $\{u_{j_k}\}$ của dãy $\{u_j\}$ sao cho

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi_{j_k} (dd^c u_{j_k})^n = \int_\Omega \varphi_0 (dd^c u_0)^n.$$

Đầu tiên, ta chỉ ra tồn tại một dãy tăng $\{j_k\} \subset \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi_{j_k} \max\left(1 + \frac{u_{j_k}}{k}, 0\right) (dd^c u_{j_k})^n = \int_{\{u_0 > -\infty\}} \varphi_0 (dd^c u_0)^n. \quad (2.1)$$

Thật vậy, cho $\chi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sao cho $0 \leq \chi_k \leq \chi_{k+1} \leq 1$ trong Ω, $\{\rho \leq -\frac{1}{k}\} \Subset \{\chi_k = 1\}$ và

$$\int_{\{\chi_k < 1\}} (-\rho)(dd^c u_0)^n \leq \frac{1}{k}.$$

Bởi vì $u_j \to u_0$ theo C_n-dung lượng trong Ω khi $j \to +\infty$, do đó $\max(u_j, -k) \to \max(u_0, -k)$ theo C_n-dung lượng khi $j \to +\infty$. Theo Bổ đề 2.2.2 ta có

$$\varphi_j \max\left(1 + \frac{u_j}{k}, 0\right) (dd^c \max(u_j, -k))^n$$
$$\to \varphi_0 \max\left(1 + \frac{u_0}{k}, 0\right) (dd^c \max(u_0, -k))^n$$

yếu trong Ω khi $j \to +\infty$. Từ đây, theo Định lý 4.1 trong [34] ta được

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \chi_k \varphi_j \max\left(1 + \frac{u_j}{k}, 0\right) (dd^c u_j)^n$$

$$= \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \chi_k \varphi_j \max\left(1+\frac{u_j}{k},0\right)(dd^c \max(u_j,-k))^n$$

$$= \int_\Omega \chi_k \varphi_0 \max\left(1+\frac{u_0}{k},0\right)(dd^c \max(u_0,-k))^n$$

$$= \int_\Omega \chi_k \varphi_0 \max\left(1+\frac{u_0}{k},0\right)(dd^c u_0)^n.$$

Bởi vì $\chi_k \max\left(1+\frac{u_0}{k},0\right) \nearrow 1_{\{u_0>-\infty\}}$ khi $k\to+\infty$ trong Ω, ta có

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \chi_k \varphi_0 \max\left(1+\frac{u_0}{k},0\right)(dd^c u_0)^n = \int_{\{u_0>-\infty\}} \varphi_0 (dd^c u_0)^n.$$

Vì vậy, tồn tại một dãy tăng $\{j_k\}\subset \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \chi_k \varphi_{j_k} \max\left(1+\frac{u_{j_k}}{k},0\right)(dd^c u_{j_k})^n = \int_{\{u_0>-\infty\}} \varphi_0 (dd^c u_0)^n. \quad (2.2)$$

Bây giờ, ta cố định $k_0\in\mathbb{N}^*$. Theo chứng minh của định lý trong [14] (xem (3.1) trong [14]) ta có

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega (1-\chi_k)\varphi_{j_k} \max\left(1+\frac{u_{j_k}}{k},0\right)(dd^c u_{j_k})^n \\
&\geq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega (1-\chi_k)\varphi_{j_k}(dd^c u_{j_k})^n \\
&\geq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega (1-\chi_{k_0})\rho(dd^c u_{j_k})^n \\
&= \liminf_{k\to+\infty} \left[\int_\Omega \rho(dd^c u_{j_k})^n - \int_\Omega \chi_{k_0}\rho(dd^c u_{j_k})^n\right] \qquad (2.3)\\
&= \int_\Omega \rho(dd^c u_0)^n - \int_\Omega \chi_{k_0}\rho(dd^c u_0)^n \\
&\geq \int_{\{\chi_{k_0}<1\}} \rho(dd^c u_0)^n \geq -\frac{1}{k_0}.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (2.2) ta suy ra

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\Omega}\varphi_{j_k}\max\left(1+\frac{u_{j_k}}{k},0\right)(dd^c u_{j_k})^n$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\Omega}\chi_k\varphi_{j_k}\max\left(1+\frac{u_{j_k}}{k},0\right)(dd^c u_{j_k})^n$$
$$=\int\limits_{\{u_0>-\infty\}}\varphi_0(dd^c u_0)^n.$$

Vậy ta hoàn thành bước đầu của việc chứng minh.

Tiếp theo, độ đo $1_{\{u_{j_k}>-\infty\}}\varphi_{j_k}\max\left(\frac{u_{j_k}}{k},-1\right)(dd^c u_{j_k})^n$ triệt tiêu trên mọi tập con đa cực của Ω, từ đó theo Bổ đề 5.14 trong [12] tồn tại $h_k\in\mathcal{F}^a(\Omega)$ sao cho

$$(dd^c h_k)^n=1_{\{u_{j_k}>-\infty\}}\varphi_{j_k}\max\left(\frac{u_{j_k}}{k},-1\right)(dd^c u_{j_k})^n.$$

Bởi vì $(dd^c h_k)^n\le(dd^c u_{j_k})^n$ trong Ω và độ đo $(dd^c h_k)^n$ triệt tiêu trên mọi tập con đa cực của Ω, từ Hệ quả 3.2 trong [1] ta có

$$h_k\ge u_{j_k}\ge w \text{ trong } \Omega.$$

Ta cần chứng minh rằng $h_k\to 0$ theo C_n-dung lượng trong Ω. Thật vậy, cho $\delta>0$ và $\psi\in\mathcal{PSH}(\Omega)$ với $-1\le\psi\le 0$. Theo Định lý 3.1 trong [1] ta có

$$\int\limits_{\{h_k<-\delta\}}(dd^c\psi)^n\le\int\limits_{\{h_k<\delta\psi\}}(dd^c\psi)^n\le\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{h_k<\delta\psi\}}(dd^c h_k)^n$$
$$\le\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{u_{j_k}>-\infty\}}\varphi_{j_k}\max\left(\frac{u_{j_k}}{k},-1\right)(dd^c u_{j_k})^n$$
$$\le-\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{u_{j_k}>-\infty\}}\max\left(\frac{u_{j_k}}{k},\rho\right)(dd^c u_{j_k})^n.$$

Vì vậy, theo Bổ đề 3.3 trong [1] và Mệnh đề 2.1.4 ta được

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{h_k<-\delta\}} (dd^c\psi)^n &\leq -\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{u_{j_k}}{k},\rho\right)(dd^c u_{j_k})^n + \frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{u_{j_k}=-\infty\}} \rho(dd^c u_{j_k})^n \\
&\leq -\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{w}{k},\rho\right)(dd^c w)^n + \frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{w=-\infty\}} \rho(dd^c w)^n \\
&= -\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{w>-\infty\}} \max\left(\frac{w}{k},\rho\right)(dd^c w)^n.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$C_n(\{h_k<-\delta\},\Omega) \leq -\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{w>-\infty\}} \max\left(\frac{w}{k},\rho\right)(dd^c w)^n.$$

Từ đó, ta có

$$\lim_{k\to+\infty} C_n(\{h_k<-\delta\},\Omega) = 0,$$

với mỗi $\delta>0$. Vậy, $h_k\to 0$ theo C_n-dung lượng trong Ω khi $k\to+\infty$. Vì vậy, theo (2.3) và Định lý trong [14] ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{k\to+\infty}\int\limits_{\{u_{j_k}>-\infty\}} \varphi_{j_k}\max\left(\frac{u_{j_k}}{k},-1\right)(dd^c u_{j_k})^n \\
&\leq \limsup_{k\to+\infty}\int\limits_{\Omega}(1-\chi_{k_0})(-\rho)(dd^c u_{j_k})^n + \limsup_{k\to+\infty}\int\limits_{\Omega}\chi_{k_0}(dd^c h_k)^n \leq \frac{1}{k_0},
\end{aligned}$$

với mọi $k_0\in\mathbb{N}^*$. Vậy,

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\{u_{j_k}>-\infty\}} \varphi_{j_k}\max\left(\frac{u_{j_k}}{k},-1\right)(dd^c u_{j_k})^n = 0.$$

Kết hợp với (2.1) ta được

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\{u_{j_k}>-\infty\}} \varphi_{j_k}(dd^c u_{j_k})^n = \int\limits_{\{u_0>-\infty\}} \varphi_0(dd^c u_0)^n.$$

Hơn nữa, theo Mệnh đề 2.1.4, ta có

$$\int\limits_{\{u_{j_k}=-\infty\}} \varphi_{j_k}(dd^c u_{j_k})^n = \int\limits_{\{f=-\infty\}} \rho(dd^c f)^n = \int\limits_{\{u_0=-\infty\}} \varphi_0(dd^c u_0)^n.$$

Từ đó, ta được

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \varphi_{j_k}(dd^c u_{j_k})^n = \int\limits_{\Omega} \varphi_0(dd^c u_0)^n.$$

(b)⇒(c). Cố định $a > 0$. Từ $u_j \to u_0$ h.k.n trong Ω khi $j \to +\infty$ do đó $v_j \searrow u_0$ khi $j \nearrow +\infty$. Từ đó, $v_j \to u_0$ theo C_n-dung lượng trong Ω. Vì vậy, theo chứng minh phần (a)⇒(b) và Bổ đề 3.3 trong [1], ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{u_0}{a}, \rho\right)(dd^c u_0)^n &= \lim_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right)(dd^c v_j)^n \\
&\geq \lim_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right)(dd^c u_j)^n \\
&\geq \lim_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right)(dd^c u_j)^n \\
&= \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{u_0}{a}, \rho\right)(dd^c u_0)^n.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$\lim_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right)(dd^c u_j)^n = \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{u_0}{a}, \rho\right)(dd^c u_0)^n.$$

Vì vậy, ta đạt được

$$\lim_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right)\right](dd^c u_j)^n = 0.$$

(c)⇒(a). Bởi vì $v_j \searrow u_0$ trong Ω khi $j \nearrow +\infty$, ta được $v_j \to u_0$ theo C_n-dung lượng trong Ω. Từ đó, ta chỉ cần chỉ ra rằng $v_j - u_j \to 0$ theo C_n-dung lượng trong Ω. Lấy K là một tập con compact tùy ý của Ω và

$\varepsilon, \delta > 0$. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $K \Subset \{\rho = -1\}$. Chọn $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ và $a > b > 1$ sao cho $0 \leq \chi \leq 1$, $\{\rho \leq -\varepsilon\} \Subset \{\chi = 1\}$, $\{\chi \neq 0\} \subset \{a\rho < -b\}$ và

$$\frac{a}{b} \int\limits_{\{w > -\infty\}} -\max\left(\frac{w}{a}, \rho\right) (dd^c w)^n < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Lấy $\psi_j \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ thỏa mãn $\psi_j \geq \rho$ và

$$C_n(K \cap \{v_j - u_j > 2\delta\}, \Omega) < \int\limits_{K \cap \{v_j - u_j > 2\delta\}} (dd^c \psi_j)^n + \varepsilon. \tag{2.5}$$

Chú ý rằng $u_j \leq v_j$ trong Ω với mọi $j \geq 1$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\{u_j < v_j - \delta\} \cap \{u_j > -b\}} \chi (dd^c u_j)^n \\
&\leq \frac{1}{\delta} \limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\{u_j < v_j - \delta\} \cap \{u_j > -b\}} \chi (v_j - u_j)(dd^c u_j)^n \\
&\leq \frac{a}{\delta} \limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right)\right] (dd^c u_j)^n = 0.
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\lim_{j \to +\infty} \int\limits_{\{u_j < v_j - \delta\} \cap \{u_j > -b\}} \chi (dd^c u_j)^n = 0.$$

Theo Bổ đề 3.3 trong [1] và Mệnh đề 2.1.4 ta có

$$\begin{aligned}
&\limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\{u_j < v_j - \delta\} \cap \{u_j > -\infty\}} \chi (dd^c u_j)^n \\
&= \limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\{u_j < v_j - \delta\} \cap \{-\infty < u_j \leq -b\}} \chi (dd^c u_j)^n \\
&\leq \limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\{u_j > -\infty\}} -\max\left(\frac{u_j}{b}, \frac{a\rho}{b}\right) (dd^c u_j)^n
\end{aligned}$$

$$\le \frac{a}{b}\limsup_{j\to+\infty}\int\limits_{\Omega} -\max\left(\frac{u_j}{a},\rho\right)(dd^cu_j)^n + \frac{a}{b}\int\limits_{\{u_j=-\infty\}} \max\left(\frac{u_j}{a},\rho\right)(dd^cu_j)^n$$

$$\le \frac{a}{b}\int\limits_{\Omega} -\max\left(\frac{w}{a},\rho\right)(dd^cw)^n + \frac{a}{b}\int\limits_{\{w=-\infty\}} \max\left(\frac{w}{a},\rho\right)(dd^cw)^n$$

$$= \frac{a}{b}\int\limits_{\{w>-\infty\}} -\max\left(\frac{w}{a},\rho\right)(dd^cw)^n.$$

Vì vậy, từ (2.4) ta suy ra

$$\limsup_{j\to+\infty}\int\limits_{\{u_j<v_j-\delta\}\cap\{u_j>-\infty\}} \chi(dd^cu_j)^n < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Bây giờ, theo Mệnh đề 2.1.4 và Mệnh đề 2.2.1 ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{K\cap\{v_j-u_j>2\delta\}} (dd^c\psi_j)^n &\le \int\limits_{\{u_j<v_j-2\delta\}} (dd^c\psi_j)^n \\
&\le \frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{u_j<v_j-2\delta\}} (v_j-\delta-u_j)^n(dd^c\psi_j)^n \\
&\le \frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\{u_j<v_j-\delta\}} (v_j-\delta-u_j)^n(dd^c\psi_j)^n \\
&\le \frac{n!}{\delta^n}\int\limits_{\{u_j<v_j-\delta\}\cap\{u_j>-\infty\}} -\psi_j(dd^cu_j)^n.
\end{aligned}$$

Từ đó, do (2.6) ta có

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\to+\infty}\int\limits_{K\cap\{v_j-u_j>2\delta\}} (dd^c\psi_j)^n &\le \frac{n!}{\delta^n}\limsup_{j\to+\infty}\int\limits_{\{u_j<v_j-\delta\}\cap\{u_j>-\infty\}} -\psi_j(dd^cu_j)^n \\
&\le \frac{n!}{\delta^n}\limsup_{j\to+\infty}\int\limits_{\Omega} -\psi_j(1-\chi)(dd^cu_j)^n \\
&\quad + \frac{n!}{\delta^n}\limsup_{j\to+\infty}\int\limits_{\{u_j<v_j-\delta\}\cap\{u_j>-\infty\}} \chi(dd^cu_j)^n
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{n!}{\delta^n} \limsup_{j\to+\infty} \int\limits_{\{\rho>-\varepsilon\}} -\rho(dd^c u_j)^n + \frac{n!\varepsilon}{\delta^n}$$

$$\leq \frac{n!}{\delta^n} \limsup_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} -\max(\rho,-\varepsilon)(dd^c u_j)^n + \frac{n!\varepsilon}{\delta^n}$$

$$\leq \frac{n!}{\delta^n} \int\limits_{\Omega} -\max(\rho,-\varepsilon)(dd^c w)^n + \frac{n!\varepsilon}{\delta^n}.$$

Kết hợp với (2.5) ta được

$$\limsup_{j\to+\infty} C_n(\{K\cap\{v_j-u_j>2\delta\},\Omega) \leq \frac{n!}{\delta^n}\int\limits_{\Omega} -\max(\rho,-\varepsilon)(dd^c w)^n + \left(\frac{n!}{\delta^n}+1\right)\varepsilon.$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$ ta nhận được

$$\lim_{j\to+\infty} C_n(\{K\cap\{v_j-u_j>2\delta\},\Omega) = 0.$$

Vậy, $v_j - u_j \to 0$ theo C_n-dung lượng trong Ω. $\square$

2.3 Tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức

Đầu tiên, ta có bổ đề về sự tồn tại nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức với vế phải là độ đo Borel không âm.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền siêu lồi bị chặn và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $w \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $\int\limits_{\Omega}(-\rho)(dd^c w)^n < +\infty$ với $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Khi đó với mỗi độ đo Borel không âm μ trong Ω sao cho*

$$(dd^c f)^n \leq \mu \leq (dd^c w)^n,$$

tồn tại duy nhất $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $u \geq w$ và $(dd^c u)^n = \mu$ trong Ω.

Chứng minh. Tính duy nhất ta suy ra từ Mệnh đề 2.1.5. Từ giả thiết và Mệnh đề 2.1.4 ta có

$$1_{\{w=-\infty\}}\mu = 1_{\{f=-\infty\}}(dd^c f)^n \text{ trong } \Omega.$$

Cho $\{\Omega_j\}$ là một dãy các miền siêu lồi, bị chặn thỏa mãn $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j$. Bởi vì độ đo $1_{\{w>-\infty\}}\mu$ triệt tiêu trên mọi tập con đa cực của Ω, áp dụng Mệnh đề 5.1 trong [29] tồn tại $u_j \in \mathcal{N}^a(\Omega_j, f)$ sao cho

$$(dd^c u_j)^n = 1_{\Omega_j\cap\{w>-\infty\}}\mu + 1_{\Omega_j\cap\{f=-\infty\}}(dd^c f)^n = \mu \text{ trong } \Omega_j.$$

Theo Mệnh đề 2.1.5 ta có $w \le u_{j+1} \le u_j \le f$ trên Ω_j. Đặt $u := \lim_{j\to+\infty} u_j$. Khi đó $w \le u \le f$ và $(dd^c u)^n = \mu$ trong Ω. Hơn nữa, từ $w \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$, ta được $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$. □

Bây giờ, ta sẽ sử dụng Định lý 2.2.3 để nghiên cứu tính ổn định của nghiệm phương trình Monge-Ampère phức. Cụ thể, ta sẽ chứng minh dãy nghiệm của chúng sẽ hội tụ theo C_n-dung lượng khi dãy độ đo tương ứng vế phải hội tụ yếu.

Định lý 2.3.2. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền siêu lồi bị chặn và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Giả sử $w \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $\int_\Omega (-\rho)(dd^c w)^n < +\infty$ với $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Khi đó với mỗi dãy các độ đo Borel không âm $\{\mu_j\}$ hội tụ yếu tới một độ đo Borel không âm μ_0 in Ω và thỏa mãn*

$$(dd^c f)^n \le \mu_j \le (dd^c w)^n \text{ với mọi } j \ge 0,$$

sẽ tồn tại $u_j \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $u_j \ge w$, $(dd^c u_j)^n = \mu_j$ với mọi $j \ge 0$ và $u_j \to u_0$ theo C_n-dung lượng trong Ω.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.3.1, tồn tại duy nhất $u_j \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho $u_j \ge w$ và $(dd^c u_j)^n = \mu_j$ trong Ω. Từ $u_j \ge w$, dãy $\{u_j\}$ là compact trong $L^1_{loc}(\Omega)$. Cho u là một điểm tụ và $\{u_{j_k}\}$ là dãy con của dãy $\{u_j\}$ sao cho $u_{j_k} \to u$ h.k.n trong Ω. Đặt $v_k := \left(\sup_{l\geq k} u_{j_l}\right)^*$. Ta cần chứng minh rằng

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] (dd^c u_{j_k})^n = 0, \tag{2.7}$$

với mỗi $a > 0$. Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$. Chọn $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sao cho $0 \leq \chi \leq 1$ và $\{\chi = 1\} \subset \{\rho < -\varepsilon\}$. Theo Mệnh đề 2.1.4 ta suy ra rằng độ đo $1_{\{f>-\infty\}}\chi(dd^c w)^n$ triệt tiêu trên mọi tập con đa cực của Ω. Theo Bổ đề 3.1 trong [14] ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] \chi(dd^c u_{j_k})^n \\
&= \limsup_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] 1_{\{f>-\infty\}}\chi(dd^c u_{j_k})^n \\
&\leq \limsup_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] 1_{\{f>-\infty\}}\chi(dd^c w)^n \\
&= \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{u}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u}{a}, \rho\right)\right] 1_{\{f>-\infty\}}\chi(dd^c w)^n = 0.
\end{aligned}$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] (dd^c u_{j_k})^n \\
&\leq \limsup_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] (1-\chi)(dd^c u_{j_k})^n \\
&\leq \limsup_{k\to+\infty} \int\limits_{\{\rho\geq-\varepsilon\}} \left[-\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] (dd^c u_{j_k})^n \\
&\leq 2\int\limits_{\Omega} -\max(\rho, -\varepsilon)(dd^c w)^n.
\end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$ ta được (2.7). Và vì vậy, theo Định lý 2.2.3 ta có $u_{j_k} \to u$ theo C_n-dung lượng trong Ω khi $k \to +\infty$. Từ đó, theo [14] ta có $(dd^c u)^n = \mu_0$

trong Ω. Rõ ràng rằng $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$. Bởi tính duy nhất của u_0 ta suy ra $u = u_0$. Vậy, $u_{j_k} \to u_0$ h.k.n trong Ω. Điều này suy ra $u_j \to u_0$ h.k.n trong Ω. Tương tự, ta có

$$\lim_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right)\right] (dd^c u_j)^n = 0,$$

với mỗi $a > 0$, ở đó $v_j := (\sup_{k \geq j} u_k)^*$. Bây giờ, tiếp tục áp dụng Định lý 2.2.3 ta nhận được $u_j \to u_0$ theo C_n-dung lượng trong Ω. $\square$

Chương 3

Thác triển dưới cực đại của hàm đa điều hòa dưới

Trong chương này, ta sẽ ứng dụng các kết quả của chương trước về tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức để nghiên cứu tính chất của hàm đa điều hòa dưới. Đặc biệt là lớp hàm thác triển dưới cực đại với các giá trị biên.

3.1 Tính chất của các hàm thuộc lớp Cegrell

Đầu tiên, ta đưa ra định nghĩa về hàm thác triển dưới cực đại của một hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên.

Định nghĩa 3.1.1. Cho $\Omega \subset \hat{\Omega}$ là các miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. Một hàm $\hat{u} \in \mathcal{PSH}(\hat{\Omega})$ được gọi là thác triển dưới của u nếu $\hat{u} \leq u$ trên Ω.

Nếu $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\hat{\Omega})$, $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $f \geq g$ trên Ω thì hàm

$$S_{u,g} := \sup\{\varphi \in \mathcal{PSH}(\hat{\Omega}) : \varphi \leq g \text{ trên } \hat{\Omega} \text{ và } \varphi \leq u \text{ trên } \Omega\}$$

được gọi là *thác triển dưới cực đại* của u với giá trị biên g.

Nhận xét. Khi nghiên cứu bài toán thác triển dưới trong các lớp hàm Cegrell với giá trị biên, ta thường giả thiết rằng hàm g trong định nghĩa trên thuộc lớp hàm $\mathcal{E}(\hat{\Omega})$. Khi đó, theo kết quả của R. Czyż và L. Hed [22] năm 2008, luôn tồn tại hàm thác triển dưới cực đại $S_{u,g}$.

Mệnh đề 3.1.2. *Cho $\Omega \subset \hat{\Omega} \Subset \mathbb{C}^n$ là các miền siêu lồi và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\hat{\Omega})$ sao cho $f \geq g$ trên Ω. Khi đó, nếu $u \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ thì $S_{u,g} \in \mathcal{F}^a(\hat{\Omega}, g)$.*

Chứng minh. Theo định nghĩa của lớp $\mathcal{F}^a(\Omega, f)$, tồn tại một hàm $\psi \in \mathcal{F}^a(\Omega)$ sao cho

$$\psi + f \leq u \leq f \text{ trên } \Omega.$$

Theo Bổ đề 4.5 trong [30], ta suy ra $S_{\psi,0} \in \mathcal{F}^a(\hat{\Omega})$. Bởi vì $f \geq g$ trên Ω, theo định nghĩa của $S_{\psi,g}$, ta có

$$S_{\psi,0} + g \leq S_{u,g} \leq g \text{ trên } \hat{\Omega}.$$

Vì vậy, $S_{u,g} \in \mathcal{F}^a(\hat{\Omega}, g)$. □

Tiếp theo, ta có mệnh đề dưới đây sẽ được sử dụng để chứng minh kết quả chính của chương.

Mệnh đề 3.1.3. *Cho Ω là một miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và G là một tập con mở của Ω. Giả sử $f, g, w \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $\{u_j\}, \{v_j\} \subset \mathcal{E}(\Omega)$ thỏa mãn*

(a) $u_j \geq w$ với mọi $j \geq 1$;

(b) $u_j \to u$ theo dung lượng trong Ω;

(c) $v_j \to v$ h.k.n trong Ω;

(d) $(dd^c u_j)^n = 0$ trên $G \cap \{-\infty < u_j < v_j\} \cap \{f < g\}$.

Khi đó, $(dd^c u)^n = 0$ trên $G \cap \{-\infty < u < v\} \cap \{f < g\}$.

Chứng minh. Với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $h_j := (\sup_{k\geq j} u_k)^*$. Khi đó $h_j \geq u_j$ và $h_j \searrow u$ trong Ω. Cho $a, b, c > 0$ sao cho $a > b$. Theo Định lý 4.1 trong [34], ta có

$$\begin{aligned}&\max(u_j + a, 0)\max(v_j + b, 0)\max(g + c, 0)(dd^c u_j)^n\\ &= \max(u_j + a, 0)\max(v_j + b, 0)\max(g + c, 0)(dd^c \max(u_j, -a))^n\end{aligned}$$

trong Ω. Từ đó, bằng cách áp dụng Định lý 3.4 trong [42] ta nhận được

$$\begin{aligned}&\max(u_j + a, 0)\max(v_j + b, 0)\max(g + c, 0)(dd^c u_j)^n\\ &\to \max(u + a, 0)\max(v + b, 0)\max(g + c, 0)(dd^c \max(u, -a))^n\end{aligned}$$

yếu trong Ω. Hơn nữa, từ

$$\max(u_j + a, 0)\max(v_j + b, 0)\max(g + c, 0)(dd^c u_j)^n = 0$$

trong $G \cap \{h_k < -b\} \cap \{f < -c\}$ với mọi $j \geq k$, ta suy ra

$$\max(u + a, 0)\max(v + b, 0)\max(g + c, 0)(dd^c u)^n = 0$$

trong $G \cap \{h_k < -b\} \cap \{f < -c\}$. Cho $k \to +\infty$, ta suy ra

$$(dd^c u)^n = 0 \text{ trên } G \cap \{-a < u < -b < v\} \cap \{f < -c < g\}$$

với mọi $a, b, c > 0$, $a > b$. Vì vậy,

$$(dd^c u)^n = 0 \text{ trên } G \cap \{-\infty < u < v\} \cap \{f < g\}.$$

□

Bây giờ, ta chứng minh một nguyên lý so sánh trên lớp hàm $\mathcal{F}^a(\Omega, f)$.

Mệnh đề 3.1.4. *Cho Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Giả sử $u, v \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ sao cho*

(i) $(dd^c u)^n = 0$ trên $\{-\infty < u < v\}$;

(ii) $\int\limits_{\Omega}(dd^c u)^n < +\infty.$

Khi đó, $u \geq v$ *trên* Ω.

Chứng minh. Đặt $w := \max(u, v)$. Khi đó, $w \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$, $u \leq w$ trên Ω và

$$(dd^c u)^n = 0 \text{ trên } \{-\infty < u < w\}. \tag{3.1}$$

Đầu tiên ta cần chứng minh rằng

$$(dd^c u)^n \leq (dd^c w)^n \text{ trên } \{u = w\} \cap \{u > -\infty\}. \tag{3.2}$$

Thật vậy, cho $E \subset \{u = w\} \cap \{u > -\infty\}$ là một tập compact. Do $E \subset \{u + \frac{1}{j} > w\}$, theo Định lý 4.1 trong [34] ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_E (dd^c u)^n &= \lim_{j\to+\infty} \int\limits_E \left(dd^c \max(u + \frac{1}{j}, w)\right)^n \\ &\leq \int\limits_E (dd^c \max(u, w))^n = \int\limits_E (dd^c w)^n.\end{aligned}$$

Vậy (3.2) được chứng minh. Bây giờ, Mệnh đề 2.1.4 suy ra rằng

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{f=-\infty\}}(dd^c f)^n = 1_{\{w=-\infty\}}(dd^c w)^n \text{ trên } \Omega.$$

Kết hợp điều này với (3.1) và (3.2) ta thu được

$$(dd^c u)^n \leq (dd^c w)^n \text{ trên } \Omega.$$

Vì vậy, theo Mệnh đề 2.1.5 ta nhận được $u \geq w$ trên Ω, và do đó, $u \geq v$ trên Ω. $\square$

3.2 Sự hội tụ theo dung lượng của các hàm thác triển dưới cực đại

Đầu tiên, ta có mệnh đề sau như là hệ quả của Định lý 2.2.3 về các điều kiện đủ để đảm bảo một dãy hàm đa điều hòa dưới hội tụ theo C_n-dung lượng.

Mệnh đề 3.2.1. *Cho* $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ *là miền siêu lồi và* $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $w \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ *sao cho*

$$\int\limits_{\Omega} (dd^c w)^n < +\infty.$$

Giả sử $u \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ *và* $\{u_j\} \subset \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ *sao cho* $u_j \to u$ *h.k.n trên* Ω *khi* $j \to \infty$ *và* $u_j \geq w$ *trên* Ω *với mọi* $j \geq 1$*. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương.*

(a) $u_j \to u$ *theo* C_n*-dung lượng* Ω*;*

(b) Với mỗi $a > 0$ *và với mỗi* $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$*, ta có*

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right) (dd^c u_j)^n = \int\limits_{\Omega} \max\left(\frac{u}{a}, \rho\right) (dd^c u)^n.$$

(c) Với mỗi $a > 0$ *và với mỗi* $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$*, ta có*

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_j}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_j}{a}, \rho\right)\right] (dd^c u_j)^n = 0,$$

ở đây $v_j := \left(\sup_{k\geq j} u_k\right)^*$.

Chứng minh. Mệnh đề được suy ra từ Định lý 2.2.3. □

Tiếp theo, ta có một số đánh giá cho các hàm thác triển dưới cực đại của các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên cũng như độ đo Monge-Ampère của chúng.

Mệnh đề 3.2.2. *Cho $\Omega \subset \hat{\Omega}$ là các miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\hat{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Giả sử $u \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ sao cho $u \geq g$ trên $\Omega \backslash K$ với K là tập con compact của Ω. Khi đó, $S := S_{u,g} \in \mathcal{F}^a(\hat{\Omega}, g)$ và*

$$(dd^c S)^n \leq 1_{K \cap \{S=u\}} (dd^c u)^n + (dd^c g)^n \text{ trong } \hat{\Omega}.$$

Hơn nữa, $(dd^c S)^n = 0$ trên $((\hat{\Omega} \backslash K) \cap \{-\infty < S < g\}) \cup (\Omega \cap \{S < u\})$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1.2, ta có $S \in \mathcal{F}^a(\hat{\Omega}, g)$. Ta đặt

$$v := (\sup\{\varphi \in \mathcal{PSH}(\Omega) : \varphi \leq u \text{ trên } K\})^*.$$

Khi đó, $v \in \mathcal{F}(\Omega), v \geq u$ trên Ω và $(dd^c v)^n = 0$ trên $(\Omega \backslash K)$. Do $u \geq g$ trên $\Omega \backslash K$, nên $S = S_{v,g}$ trên $\hat{\Omega}$. Từ Định lý 1.1 trong [33] ta suy ra

$$(dd^c S)^n = 0 \text{ trên } \Omega \cap \{S < \min(v, g)\}$$

và

$$(dd^c S)^n \leq 1_\Omega (dd^c v)^n + (dd^c g)^n.$$

Điều này suy ra,

$$(dd^c S)^n = 0 \text{ trên } \Omega \cap \{S < \min(u, g)\} \tag{3.3}$$

và

$$\begin{aligned}(\mathrm{dd}^c S)^n \leqslant\ & 1_{K\cap\{v=-\infty\}}(\mathrm{dd}^c v)^n + 1_{K\cap\{S=v\}\{v>-\infty\}}(\mathrm{dd}^c v)^n \\ & + 1_{K\cap\{S=g\}\{g>-\infty\}}(\mathrm{dd}^c v)^n + (\mathrm{dd}^c g)^n.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh rằng

$$(dd^c S)^n = 0 \text{ trên } ((\hat{\Omega}\backslash K) \cap \{-\infty < S < g\}) \cup (\Omega \cap \{S < \min(u, g)\}).$$

Thật vậy, theo Định lý 2.1 trong [12] tồn tại $\{g_j\} \subset \mathcal{E}_0(\hat{\Omega}) \cap \mathcal{C}(\hat{\Omega})$ sao cho $g_j \searrow g$ trên $\hat{\Omega}$ và tồn tại $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ sao cho $u_j \searrow u$ trong Ω. Đặt

$$h_j = \begin{cases} \min(u_j, g_j) & \text{trên } \Omega \\ g_j & \text{trên } \hat{\Omega}\backslash\Omega, \end{cases}$$

và

$$\hat{u}_j := (\sup\{\varphi \in \mathcal{PSH}^-(\hat{\Omega}) : \varphi \leq h_j \text{ trong } \hat{\Omega}\})^*.$$

Dễ dàng thấy rằng $\hat{u}_j \in \mathcal{PSH}^-(\hat{\Omega}) \cap L^\infty(\hat{\Omega})$ và $\hat{u}_j \searrow S$ trong $\hat{\Omega}$ khi $j \nearrow +\infty$. Bởi vì $h_j \in \mathcal{C}(\hat{\Omega})$ nên theo Hệ quả 9.2 trong [4], ta có

$$(dd^c \hat{u}_j)^n = 0 \text{ trên } \{\hat{u}_j < h_j\}.$$

Hơn nữa, từ $h_j \geq g$ trên $\hat{\Omega}\backslash K$, ta suy ra rằng

$$(dd^c \hat{u}_j)^n = 0 \text{ trên } (\hat{\Omega}\backslash K) \cap \{\hat{u}_j < g\}.$$

Từ đây, theo Mệnh đề 3.1.3 ta suy ra

$$(dd^c S)^n = 0 \text{ trên } (\hat{\Omega}\backslash K) \cap \{-\infty < S < g\}.$$

Kết hợp với (3.3), ta có

$$(dd^c S)^n = 0 \text{ trên } ((\hat{\Omega}\backslash K) \cap \{-\infty < S < g\}) \cup (\Omega \cap \{S < \min(u, g)\}).$$

Tiếp theo, với $E \subset K \cap \{S = v\} \cap \{v > -\infty\}$ là một tập compact tùy ý. Bởi vì $S \leqslant u \leqslant v$ trên Ω, nên $E \subset \{S + \frac{1}{j} > u\}$ với mọi $j \geqslant 1$. Từ đó, theo Mệnh đề 4.1 trong [34] ta có

$$\begin{aligned}\int_E (dd^c S)^n &= \lim_{j\to+\infty} \int_E \left(dd^c \max(S + \frac{1}{j}, u)\right)^n \\ &\leq \int_E (dd^c \max(S, u))^n = \int_E (dd^c u)^n.\end{aligned}$$

Điều này suy ra rằng

$$(dd^c S)^n \leq (dd^c u)^n \text{ trên } K \cap \{S = v\} \cap \{v > -\infty\}. \tag{3.5}$$

Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$(dd^c S)^n \leq (dd^c g)^n \text{ trên } K \cap \{S = g\} \cap \{g > -\infty\}. \tag{3.6}$$

Bây giờ, do $u \leq v$ trong Ω, Bổ đề 4.1 trong [1] suy ra

$$(dd^c v)^n \leq (dd^c u)^n \text{ trên } K \cap \{v = -\infty\}.$$

Kết hợp (3.4), (3.5), (3.6), ta suy ra

$$\begin{aligned}(dd^c S)^n &\leqslant 1_{K\cap\{v=-\infty\}}(dd^c u)^n + 1_{K\cap\{S=v\}\cap\{v>-\infty\}}(dd^c u)^n + (dd^c g)^n \\ &\leq 1_{K\cap\{S=u\}}(dd^c u)^n + (dd^c g)^n.\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đã được chứng minh. □

Bổ đề 3.2.3. *Cho $\Omega \subset \hat{\Omega} \Subset \mathbb{C}^n$ là các miền siêu lồi và $\{G_j\}$ là một dãy các miền siêu lồi bị chặn sao cho $G_j \Subset G_{j+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$. Giả sử $u \in \mathcal{F}^a(\Omega)$ và ta định nghĩa*

$$u_j := \left(\sup\{\varphi \in \mathcal{PSH}^-(\Omega) : \varphi \le u \text{ trên } \Omega \backslash G_j\}\right)^*.$$

Khi đó, $S_{u_j,0} \nearrow 0$ h.k.n trong $\hat{\Omega}$ khi $j \nearrow +\infty$.

Chứng minh. Đặt $S_j := S_{u_j,0}$ và $S := (\sup_{j\ge 1} S_j)^*$ trong $\hat{\Omega}$. Bởi vì $u_j \nearrow 0$ h.k.n trong Ω, ta có $S_j \nearrow S$ h.k.n trong $\hat{\Omega}$ khi $j \nearrow +\infty$. Theo Định lý 1.1 trong [33] ta suy ra

$$(dd^c S_j)^n \le 1_{\Omega \cap \{S_j = u_j\}} (dd^c u_j)^n \text{ trong } \hat{\Omega}. \tag{3.7}$$

Bởi vì $u_j \to 0$ h.k.n trong Ω khi $j \to +\infty$ và $(dd^c u)^n$ triệt tiêu trên tất cả các tập đa cực, theo Bổ đề 3.1 trong [14], ta có

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\Omega} -\max(u_j, -1)(dd^c u)^n = 0. \tag{3.8}$$

Tiếp theo, theo Hệ quả 3.3 trong [14], dãy độ đo $\{\max(S,-1)(dd^c S_j)^n\}$ hội tụ theo topo yếu tới $\{\max(S,-1)(dd^c S)^n\}$. Từ đó, bởi (3.7), (3.8) và sử dụng Bổ đề 3.3 trong [1], ta có

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\Omega}} -\max(S,-1)(dd^c S)^n &\le \limsup_{j\to+\infty} \int_{\hat{\Omega}} -\max(S,-1)(dd^c S_j)^n \\ &\le \limsup_{j\to+\infty} \int_{\hat{\Omega}} -\max(S_j,-1)(dd^c S_j)^n\end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} -\max(u_j,-1)(dd^c u_j)^n$$
$$\leq \limsup_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} -\max(u_j,-1)(dd^c u)^n = 0.$$

Điều này suy ra

$$-\max(S,-1)(dd^c S)^n = 0 \text{ trong } \hat{\Omega}.$$

Vì vậy, theo Định lý 3.8 trong [13] ta suy ra $S = 0$ trên $\hat{\Omega}$. □

Bây giờ, ta sẽ chứng minh sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy các hàm thác triển dưới cực đại với giá trị biên, khi dãy các hàm đa điều hòa dưới tương ứng của chúng hội tụ theo C_n-dung lượng.

Định lý 3.2.4. *Cho $\Omega \subset \hat{\Omega} \Subset \mathbb{C}^n$ là các miền siêu lồi và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\hat{\Omega})$, $w \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ sao cho $f \geq g$ trên Ω và*

$$\int\limits_{\hat{\Omega}} (dd^c g)^n + \int\limits_{\Omega} (dd^c w)^n < +\infty.$$

Giả sử $\{u_j\} \subset \mathcal{F}^a(\Omega, f)$ sao cho $u_j \geq w$ với mọi $j \geq 1$ và $u_j \to u$ theo C_n-dung lượng trong Ω. Khi đó, $S_{u_j,g} \to S_{u,g}$ theo C_n-dung lượng trong $\hat{\Omega}$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $w \geq g$ trên $\Omega\backslash K$ với K là tập compact của Ω. Đặt $S_j := S_{u_j,g}$ và $S := S_{u,g}$. Từ $u_j \geq w \geq g$ trên $\Omega\backslash K$, theo Bổ đề 3.2.2 ta có

$$(dd^c S_j)^n \leq 1_{K\cap\{S_j=u_j\}}(dd^c u_j)^n + (dd^c g)^n \text{ trong } \hat{\Omega}.$$

Ta cần chứng minh rằng nếu $\{S_{j_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{S_j\}$ thì tồn tại một dãy con $\{S_{j_{k_l}}\}$ của dãy $\{S_{j_k}\}$ sao cho $S_{j_{k_l}} \to S$ theo C_n-dung lượng trong $\hat{\Omega}$ khi $l \to +\infty$. Bằng cách thay $\{S_{j_k}\}$ bởi một dãy con thích hợp, ta có thể giả sử dãy $\{S_{j_k}\}$ hội tụ yếu tới một hàm đa điều hòa dưới H trong $\hat{\Omega}$.

Ta cần chỉ ra rằng $S_{j_k} \to H$ theo C_n-dung lượng trong $\hat{\Omega}$. Thật vậy, đặt

$$H_k := \left(\sup_{l\geq k} S_{j_l}\right)^* \text{ trên } \hat{\Omega} \text{ và } v_k := \left(\sup_{l\geq k} u_{j_l}\right)^* \text{ trên } \Omega.$$

Lấy $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega) \cap C(\Omega)$ và $\hat{\rho} \in \mathcal{E}_0(\hat{\Omega}) \cap C(\hat{\Omega})$ sao cho $K \subset \Omega \cap \{\hat{\rho} = \rho\}$. Cho $a > 0$, do $S_{j_k} \leq H_k \leq g$ trên $\hat{\Omega}$, nên

$$\max\left(\frac{H_k}{a}, \hat{\rho}\right) = \max\left(\frac{S_{j_k}}{a}, \hat{\rho}\right) = \hat{\rho} \text{ trên } \hat{\Omega} \cap \{g = -\infty\}.$$

Từ đó, theo Bổ đề 3.1 trong [14], Mệnh đề 3.2.1 và Bổ đề 3.2.2 ta có

$$\limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\hat{\Omega}} \left[\max\left(\frac{H_k}{a}, \hat{\rho}\right) - \max\left(\frac{S_{j_k}}{a}, \hat{\rho}\right)\right] (dd^c S_{j_k})^n$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{K\cap\{S_{j_k}=u_{j_k}\}} \left[\max\left(\frac{H_k}{a}, \hat{\rho}\right) - \max\left(\frac{S_{j_k}}{a}, \hat{\rho}\right)\right] (dd^c u_{j_k})^n$$
$$+ \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\hat{\Omega}} \left[\max\left(\frac{H_k}{a}, \hat{\rho}\right) - \max\left(\frac{S_{j_k}}{a}, \hat{\rho}\right)\right] (dd^c g)^n$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left[\max\left(\frac{v_k}{a}, \rho\right) - \max\left(\frac{u_{j_k}}{a}, \rho\right)\right] (dd^c u_{j_k})^n$$

$$+ \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\hat{\Omega}\cap\{g>-\infty\}} \left[\max\left(\frac{H_k}{a}, \hat{\rho}\right) - \max\left(\frac{S_{j_k}}{a}, \hat{\rho}\right)\right] (dd^c g)^n = 0.$$

Điều này suy ra,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\hat{\Omega}} \left[\max\left(\frac{H_k}{a}, \hat{\rho}\right) - \max\left(\frac{S_{j_k}}{a}, \hat{\rho}\right)\right] (dd^c S_{j_k})^n = 0.$$

Vì vậy, cũng từ Mệnh đề 3.2.1, ta suy ra $S_{j_k} \to H$ theo C_n-dung lượng trong $\hat{\Omega}$. Theo Bổ đề 3.2.2, ta suy ra

$$(dd^c S_{j_k})^n = 0 \text{ trên } (\{S_{j_k} < g\} \cap (\hat{\Omega}\backslash K)) \cup (\Omega \cap \{S_{j_k} < u_{j_k}\}),$$

với mọi $k \geq 1$. Do $S_{j_k} \geq S_{w,g}$ với mọi $k \geq 1$, theo Mệnh đề 3.1.3, ta suy ra

$$(dd^c H)^n = 0 \text{ trên } (\{-\infty < H < g\} \cap (\hat{\Omega}\backslash K)) \cup (\Omega \cap \{-\infty < H < u\}).$$

Hơn nữa, từ $S \leq u$ trên Ω và $S \leq g$ trên $\hat{\Omega}$ ta suy ra

$$(dd^c H)^n = 0 \text{ trên } \{-\infty < H < S\}.$$

Bởi vì $H_k \leq v_k$ trên Ω, khi đó ta có $H \leq u$ trên Ω, và vì vậy,

$$H \leq S \text{ trong } \hat{\Omega}.$$

Do $S, H \in \mathcal{F}^a(\hat{\Omega}, g)$, Mệnh đề 3.1.4 suy ra rằng $H = S$ trong $\hat{\Omega}$ và vì vậy $S_{j_k} \to S$ theo C_n-dung lượng trong $\hat{\Omega}$.

Trường hợp 2. Trường hợp tổng quát. Cho $\{G_k\}$ là một dãy các miền siêu lồi bị chặn sao cho $G_k \Subset G_{k+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Cho $\psi \in \mathcal{F}^a(\Omega)$ sao cho $\psi + f \le w \le f$ trong Ω. Đặt $\varphi_k = S_{\psi_k,0}$, ở đó

$$\psi_k := (\sup\{\varphi \in \mathcal{PSH}^-(\Omega) : \varphi \le \psi \text{ trên } \Omega \backslash G_k\})^*.$$

Theo Bổ đề 3.2.3 ta có $\varphi_k \nearrow 0$ h.k.n trong $\hat{\Omega}$. Do

$$u_j \ge w \ge f + \psi_k \ge g + \varphi_k \text{ trên } \Omega \backslash G_k,$$

theo trường hợp 1, ta có $S_{u_j,g+\varphi_k} \to S_{u,g+\varphi_k}$ theo C_n-dung lượng trong $\hat{\Omega}$. Hơn nữa, bởi vì

$$|S_{u_j,g} - S_{u,g}| \le |S_{u_j,g+\varphi_k} - S_{u,g+\varphi_k}| - 2\varphi_k \text{ trong } \hat{\Omega},$$

với mọi $k \ge 1$. Từ đó, $S_{u_j,g} \to S_{u,g}$ theo C_n-dung lượng trong $\hat{\Omega}$. $\square$

Kết luận và kiến nghị

I. Kết luận

Trong phần này, ta sẽ điểm lại các kết quả đã đạt được của Luận án. Cụ thể, Luận án nghiên cứu bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức trên miền giả lồi không trơn, nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức, nghiên cứu sự hội tụ theo dung lượng của dãy các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên và đã đạt được những kết quả chính sau đây.

- Chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$ trong trường hợp Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$, đa điều hòa dưới loại m.
- Chứng minh tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán $MA\,(\Omega, \phi, f)$ trong trường hợp Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$, đa điều hòa dưới loại m.
- Đưa ra các điều kiện đủ đối với dãy các hàm đa điều hòa dưới $\{u_j\}$ để có được sự tương đương giữa sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy $\{u_j\}$ và sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère tương ứng $\{(dd^c u_j)^n\}$.
- Chứng minh tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức.

- Chứng minh một số tính chất của các hàm thác triển dưới cực đại $S_{u,g}$ của các hàm đa điều hòa dưới u với giá trị biên g.

- Chứng minh sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy các hàm thác triển dưới cực đại $S_{u_j,g}$ của dãy các đa điều hòa dưới $\{u_j\}$ với giá trị biên g khi dãy $\{u_j\}$ hội tụ theo C_n-dung lượng.

II. Kiến nghị

Từ những kết quả thu được của luận án trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Nghiên cứu bài toán $MA\left(\Omega, \phi, f\right)$ trong trường hợp Ω là miền giả lồi chặt, đa điều hòa dưới loại m và f bị chặn ở gần biên của Ω.

- Nghiên cứu các điều kiện đối với dãy các hàm đa điều hòa dưới $\{u_j\}$ trong các lớp hàm lớn hơn, để có được sự tương đương giữa sự hội tụ theo C_n-dung lượng của dãy $\{u_j\}$ và sự hội tụ yếu của dãy độ đo Monge-Ampère tương ứng $\{(dd^c u_j)^n\}$.

- Nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong các lớp hàm lớn hơn.

Cuối cùng, chúng tôi xin trân trọng đón nhận những góp ý quý báu của quý độc giả về những hướng nghiên cứu, những vấn đề mới liên quan tới đề tài luận án để tiếp tục phát triển hướng nghiên cứu này.

Danh mục các công trình sử dụng trong luận án

[1] N.X. Hong, N.V. Trao and T.V. Thuy (2017), "Convergence in capacity of plurisubharmonic functions with given boundary values", *Int. J. Math.*, **28**(3), Article Id:1750018, 14p. DOI:10.1142/S0129167X17500185.

[2] N.X. Hong and T.V. Thuy (2018), "Hölder continuous solutions to the complex Monge-Ampère equations in non-smooth pseudoconvex domains", *Anal. Math. Phys.*, **8**, Issue 3, 465–484.

[3] L.M. Hai, T.V. Thuy and N.X. Hong (2018), "A note on maximal subextensions of plurisubharmonic functions", *Acta Math Vietnam*, **43**, 137-146.

Tài liệu tham khảo

[1] P. Åhag, U. Cegrell, R. Czyż and P.H. Hiep (2009), "Monge-Ampère measures on pluripolar sets", *J. Math. Pures Appl.*, **92**, 613-627.

[2] L. Baracco, T.V. Khanh, S. Pinton and G. Zampieri (2016), "Hölder regularity of the solution to the complex Monge-Ampère equation with L^p density", *Calc. Var. PDE,* 55-74.

[3] E. Bedford và B.A. Taylor (1976), "The Dirichlet problem for a comlex Monge–Ampère equation", *Invent. Math.*, **37**, 1–44.

[4] E. Bedford and B.A.Taylor (1982), "A new capacity for plurisubharmonic functions", *Acta Math.*, **149**(1,2), 1–40.

[5] E. Bedford and B.A. Taylor (1988), "Smooth plurisubharmonic functions without subextension", *Math. Z.*, **198**(3), 331-337.

[6] Z. Błocki (1995), "On the L^p-stability for the complex Monge-Ampère operator", *Michigan Math. J.*, **42**, 269–275.

[7] Z. Błocki (1996), "The complex Monge-Ampère operator in hyperconvex domains", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. sci.,* **23**, 721-747.

[8] Z. Błocki (2006), "The domain of definition of the complex Monge-Ampère operator", *Amer. J. Math.*, **128**, 519–530.

[9] Z. Błocki (2009), "A note on maximal plurisubharmonic functions", *Uzbek Math. J.*, **1**, 28-32.

[10] L. Caffarelli, J.J. Kohn, L. Nirenberg, J. Spruck (1985), "The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations, II: complex Monge - Ampère, and uniformly elliptic equations". *Comm. on Pure and Appl. Math.*, **38**, 209-252.

[11] U. Cegrell (1998), "Pluricomplex energy", *Acta Math.*, **180**, 187-217.

[12] U. Cegrell (2004), "The general definition of the complex Monge-Ampère operator", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* **54**, 159-179.

[13] U. Cegrell (2008), "A general Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator", *Ann. Polon. Math.*, **94**, 131-147.

[14] U. Cegrell (2012), "Convergence in Capacity", *Canad. Math. Bull.,* **55**, 242–248.

[15] U. Cegrell and L. Hed (2008), "Subextension and approximation of negative plurisubharmonic functions", *Michigan Math. J.,* **56**, 593-601.

[16] U. Cegrell and S. Kołodziej (2006), "The equation of complex Monge-Ampère type and stability of solutions", *Math. Ann.,* **334**, 713-729.

[17] U. Cegrell, S. Kołodziej and A. Zeriahi (2005), "Subextension of plurisubharmonic functions with weak singularities", *Math. Z.*, **250**, 7-22.

[18] U. Cegrell, S. Kołodziej and A. Zeriahi (2011), "Maximal subextensions of plurisubharmonic functions", *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **20**(6), Fascicule Spcial, 101-122.

[19] U. Cegrell and A. Zeriahi (2003), "Subextension of plurisubharmonic functions with bounded Monge-Ampère operator mass", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **336**, 305-308.

[20] U. Cegrell, S. Kolodziej and A. Zeriahi (2005), "Subextension of plurisubharmonic functions with weak singularities", *Math. Z.*, **250**(1), 7-22.

[21] M. Charabati (2015), "Hölder regularity for solutions to complex Monge-Ampère equations", *Ann. Pol. Math.*, **113**(2), 109-127.

[22] R. Czyż and L. Hed (2008), "Subextension of plurisubharmonic functions without increasing the total Monge-Ampère mass", *Ann. Polon. Math.*, **94**, 275-281.

[23] J.P. Demailly, S. Dinew, V. Guedj, P.H. Hiep (2014), "S. Kołodziej and A. Zeriahi, Hölder contin-uous solutions to Monge-Ampère equations", *J. Eur. Math. Soc. (JEMS),* ***16***(4), 619-647.

[24] S. Dinew and S. Kolodziej (2014), "A priori estimates for the complex Hessian equations", *Analysis & PDE.*, **7**(1), 227–244.

[25] V. Guedj and A. Zeriahi (2012), "Stability of solutions to complex Monge-Ampère equations in big cohomology classes", *Mathematical Research Letters*, **19**(5), 1025–1042.

[26] V. Guedj, S. Kołodziej and A. Zeriahi (2008), "Hölder continuous solutions to the complex Monge-Ampère equations", *Bull. Lond. Math. Soc.* **40**(6), 1070-1080.

[27] L.M. Hai and N.X. Hong (2014), "Subextension of plurisubharmonic functions without changing the Monge-Ampère measures and applications", *Ann. Polon. Math.*, **112**, 55-66.

[28] L.M. Hai, N.X. Hong and T.V. Dung (2015), "Subextension of plurisubharmonic functions with boundary values in weighted pluricomplex energy classes", *Complex Var. Elliptic Equ.*, **60**, Issue 11, 1580-1593.

[29] L.M. Hai, N.V. Trao and N.X. Hong (2014), "The complex Monge-Ampère equation in unbounded hyperconvex domains in $\mathbb{C}^n$", *Complex Var. Elliptic Equ.,* **59**(12), 1758-1774.

[30] P.H. Hiep (2008), "Pluripolar sets and the subextension in Cegrell's classes", *Complex Variables and Elliptic Equations*, **53**(7), 675–684

[31] P.H. Hiep (2010), "Hölder continuity of solutions to the Monge-Ampère equations on compact Kähler manifolds", *Ann. Inst. Fourier*, **60**(5), 1857-1869 .

[32] P.H. Hiep (2010), "Convergence in capacity and applications", *Math. Scand.*, **107**, 90–102.

[33] N.X. Hong (2015), "Monge-Ampère measures of maximal subextensions of plurisubharmonic functions with given boundary values", *Complex Var. Elliptic Equ.*, **60**(3), 429-435.

[34] N.V. Khue and P.H. Hiep (2009), "A comparison principle for the complex Monge-Ampère operator in Cegrell's classes and applications", *Trans. Am. Math. Soc.*, **361**(10), 5539-5554.

[35] S. Kołodziej (1995), "The range of the complex Monge-Ampère operator, II", *Indiana Univ. Math. J.*, **44**, 765-782.

[36] S. Kołodziej (1996), "Some sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator", *Ann. Pol. Math.,* **65**(1), 11-21.

[37] S. Kołodziej (1998), "The complex Monge-Ampère equation", *Acta Math.*, **180**(1), 69-117.

[38] S.Y. Li (2004), "On the existence and regularity of Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equations on weakly pseudoconvex domains", *Calc. Var. PDE*, **20**, 119-132.

[39] H. El Mir (1980), "Fonctions plurisousharmoniques et ensembles pluripolaires", *Seminaire Lelong-Skoda, Lecture Notes in Math.*, **822**, Springer-Verlarg, 61-76.

[40] A. Simioniuc and G. Tomassini (2008), "The Bremermann Dirichlet problem for unbounded domains of $\mathbb{C}^n$", *Manuscr. Math.*, **126**(1), 73-97.

[41] Y. Xing (1996), "Continuity of the complex Monge - Ampère operator", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**(2), 457–467.

[42] Y. Xing (2008), "Convergence in capacity", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* **58**(5), 1839-1861.